0001831278618999

九州工業大学

2014年 工学部 第2問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 座標平面において，行列 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ が表す移動（1次変換）を f とし，直線 $x+2y=1$ を ℓ とする．次に答えよ．

(1) 点 $\mathrm{P}(p_1,\ p_2)$ が f によって移る点を $\mathrm{Q}(q_1,\ q_2)$ とする．P が ℓ 上の点のとき，Q は ℓ 上にあることを示せ．

(2) ℓ 上の点 R は f によって R 自身に移る．

(i) R の座標を求めよ．

(ii) R と異なる ℓ 上の点 P が f によって点 Q に移るとき，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{RP}}|}$ を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_1=1,\quad b_1=0,\quad \begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める．$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．さらに $\lim_{n\to\infty}a_n$，$\lim_{n\to\infty}b_n$ を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\ p_2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}p_1+\frac{2}{3}p_2\\ \frac{1}{4}p_1+\frac{2}{3}p_2\end{pmatrix}$ …①

$\therefore q_1=\frac{1}{2}p_1+\frac{2}{3}p_2$，$q_2=\frac{1}{4}p_1+\frac{2}{3}p_2$

$\therefore q_1+2q_2=\frac{1}{2}p_1+\frac{2}{3}p_2+\frac{1}{2}p_1+\frac{4}{3}p_2$

$=p_1+2p_2$

∴ P が ℓ 上の点のとき．$p_1+2p_2=1$　このとき．$q_1+2q_2=1$　∴ Q は ℓ 上にある ▨

(2)(i) ①より．$R(r_1,r_2)$ とすると，

$\begin{pmatrix}r_1\\ r_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}r_1+\frac{2}{3}r_2\\ \frac{1}{4}r_1+\frac{2}{3}r_2\end{pmatrix}$

$\therefore r_1=\frac{1}{2}r_1+\frac{2}{3}r_2$ かつ $r_2=\frac{1}{4}r_1+\frac{2}{3}r_2$

$\therefore r_2=\frac{3}{4}r_1$　これと，$r_1+2r_2=1$ より，$r_1=\frac{2}{5}$，$r_2=\frac{3}{10}$　$\therefore \underline{R\left(\frac{2}{5},\frac{3}{10}\right)}$ //

(3) $|\overrightarrow{RP}|=\sqrt{(p_1-\frac{2}{5})^2+(p_2-\frac{3}{10})^2}$　$p_1+2p_2=1$ より．$|\overrightarrow{RP}|=\frac{\sqrt{5}}{2}|p_1-\frac{2}{5}|$

$|\overrightarrow{RQ}|=\sqrt{(q_1-\frac{2}{5})^2+(q_2-\frac{3}{10})^2}$　∴ $q_1+2q_2=1$ より．$|\overrightarrow{RQ}|=\frac{\sqrt{5}}{2}|q_1-\frac{2}{5}|$

ここで，$q_1=\frac{1}{2}p_1+\frac{2}{3}p_2=\frac{1}{6}p_1+\frac{1}{3}$　$\therefore |\overrightarrow{RQ}|=\frac{\sqrt{5}}{12}|p_1-\frac{2}{5}|$　$\therefore \dfrac{|\overrightarrow{RQ}|}{|\overrightarrow{RP}|}=\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{12}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\underline{\frac{1}{6}}$ //

2014年 工学部 第2問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 座標平面において，行列 $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ が表す移動（1次変換）を f とし，直線 $x+2y=1$ を ℓ とする．次に答えよ．

(1) 点 $\mathrm{P}(p_1,\ p_2)$ が f によって移る点を $\mathrm{Q}(q_1,\ q_2)$ とする．Pが ℓ 上の点のとき，Qは ℓ 上にあることを示せ．

(2) ℓ 上の点Rは f によってR自身に移る．

(i) Rの座標を求めよ．

(ii) Rと異なる ℓ 上の点Pが f によって点Qに移るとき，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{RP}}|}$ を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_1=1,\quad b_1=0,\quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める．$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．さらに $\lim_{n\to\infty} a_n$，$\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

(3) $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{2}{3}b_n \cdots ②$

$b_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{2}{3}b_n \cdots ③$

これらと $a_1=1$ より．

$a_2=\frac{1}{2}a_1+\frac{2}{3}b_1=\frac{1}{2}$

②より，$b_n=\frac{3}{2}a_{n+1}-\frac{3}{4}a_n$，$b_{n+1}=\frac{3}{2}a_{n+2}-\frac{3}{4}a_{n+1}$

これを③に代入して，

$$\frac{3}{2}a_{n+2}-\frac{3}{4}a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}a_{n+1}-\frac{3}{4}a_n\right)$$

$$\therefore 6a_{n+2}-7a_{n+1}+a_n=0$$

$$\begin{cases} a_{n+2}-\frac{1}{6}a_{n+1}=a_{n+1}-\frac{1}{6}a_n & \cdots ④ \\ a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{6}(a_{n+1}-a_n) & \cdots ⑤ \end{cases}$$

④より．$a_{n+1}-\frac{1}{6}a_n=a_2-\frac{1}{6}a_1=\frac{1}{3}$　　$\therefore a_{n+1}-\frac{1}{6}a_n=\frac{1}{3} \cdots ⑥$

⑤より．$\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 $a_2-a_1=-\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{6}$ の等比数列

$\therefore a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=-3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n$　　$\therefore a_{n+1}-a_n=-3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n \cdots ⑦$

⑥−⑦より．$\frac{5}{6}a_n=\frac{1}{3}+3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n$　　$\therefore \underline{a_n=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}}$ //

$b_n=\frac{3}{2}a_{n+1}-\frac{3}{4}a_n$ に代入して，　$\underline{b_n=\frac{3}{10}-\frac{9}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n}$ //

$\therefore \underline{\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{5},\ \lim_{n\to\infty}b_n=\frac{3}{10}}$ //