九州工業大学

2015年 工学部 第3問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ n を2以上の自然数とし，関数 $f(x)$ を $f(x) = x^n \log x$ $(x > 0)$ とする．ただし，対数は自然対数とする．次に答えよ．

(1) $x > 0$ のとき，不等式 $\log x + \dfrac{1}{x} > 0$ を証明せよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x^n \log x = 0$ を示せ．

(3) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，その最小値を求めよ．また，曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ．ただし，曲線の凹凸は調べなくてよい．

(4) $f(x)$ が最小値をとるときの x の値を c_n とし

$$I_n = \int_{c_n}^{1} f(x)\,dx$$

とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 I_n$ を求めよ．

(1) $g(x) = \log x + \dfrac{1}{x}$ とおくと．$g'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	1	↗

∴ $g'(x) = 0$ となるのは，$x = 1$ のときであり，

増減表は右のようになる．∴ $x > 0$ において $g(x) > 0$ ▨

(2) (1)より．$\log x > -\dfrac{1}{x}$ なので，$\underbrace{-\dfrac{1}{x}\cdot x^n}_{\to 0} < x^n \log x < 0$　$(0 < x < 1$ において$)$

∴ $n \geqq 2$ のとき，はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{x\to+0} x^n \log x = 0$ ▨

(3) $f'(x) = nx^{n-1}\log x + x^n \cdot \dfrac{1}{x}$

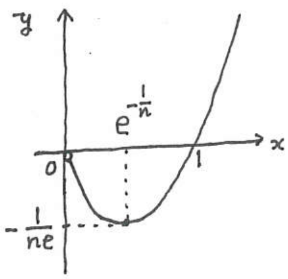
$= x^{n-1}(n\log x + 1)$

x	(0)	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{n}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{ne}$	↗

∴ $f'(x) = 0$ となるのは，$\log x = -\dfrac{1}{n}$ すなわち，$x = e^{-\frac{1}{n}}$ のとき．

∴ 右の増減表より，最小値は，$-\dfrac{1}{ne}$ $(x = e^{-\frac{1}{n}}$ のとき$)$ //

グラフは，$f(1) = 0$，(2)，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ より右のようになる．



(4) (3)より．$c_n = e^{-\frac{1}{n}}$ であるから．

$I_n = \displaystyle\int_{c_n}^{1} x^n \log x\,dx$

$= \displaystyle\int_{c_n}^{1} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' \log x\,dx$

$= \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\log x\right]_{e^{-\frac{1}{n}}}^{1} - \displaystyle\int_{e^{-\frac{1}{n}}}^{1} \frac{x^n}{n+1}\,dx$

2枚目につづく

2015年 工学部 第3問

2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ n を2以上の自然数とし，関数 $f(x)$ を $f(x) = x^n \log x$ $(x > 0)$ とする．ただし，対数は自然対数とする．次に答えよ．

(1) $x > 0$ のとき，不等式 $\log x + \dfrac{1}{x} > 0$ を証明せよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x^n \log x = 0$ を示せ．

(3) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，その最小値を求めよ．また，曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ．ただし，曲線の凹凸は調べなくてよい．

(4) $f(x)$ が最小値をとるときの x の値を c_n とし

$$I_n = \int_{c_n}^{1} f(x)\,dx$$

とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 I_n$ を求めよ．

(4)のつづき．

$$I_n = \frac{e^{-\frac{n+1}{n}}}{n(n+1)} - \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_{e^{-\frac{1}{n}}}^{1}$$

$$= \frac{e^{-\frac{n+1}{n}}}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{e^{-\frac{n+1}{n}}}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{2n+1}{n(n+1)^2} \cdot e^{-\frac{n+1}{n}} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n^2 I_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} \cdot e^{-1-\frac{1}{n}} - \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2$$

$$= \underline{\frac{2}{e} - 1}$$ //