

2016年工学部第2問

2  $s > 0, t > 0$ とする. 正の数からなる2つの数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  は初項と第2項が  $a_1 = b_1 = s, a_2 = b_2 = t$  であり, すべての自然数  $n$  に対して

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}, \quad b_{n+2} = \sqrt{b_{n+1}b_n}$$

をみたすとする. 次に答えよ.

- (1)  $a_3, b_3, a_4, b_4$  を  $s, t$  を用いて表せ.
- (2) 自然数  $n$  に対して,  $c_n = a_{n+1} - a_n$  とおく. 数列  $\{c_n\}$  は等比数列であることを示し, 一般項を求めよ. さらに, 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ.
- (3) 自然数  $n$  に対して,  $d_n = \log b_n$  とおく. 数列  $\{d_n\}$  の一般項を求めよ. さらに, 数列  $\{b_n\}$  の一般項を  $s$  の累乗と  $t$  の累乗を用いて表せ. ただし, 対数は自然対数とする.
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  と  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  を求めよ.
- (5)  $t = s$  は  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  であるための必要十分条件であることを示せ.