

2012年工学部第2問

2 四面体  $OABC$  は  $OA = 1$ ,  $OB = \sqrt{15}$ ,  $OC = 2$ ,  $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ ,  $\angle AOC = \frac{\pi}{3}$  を満たしている. 線分  $OA$  と  $OB$  を  $s : 1 - s$  ( $0 < s < 1$ ) に内分する点をそれぞれ  $P$ ,  $Q$  とし,  $\triangle CPQ$  の重心を  $G$  とする.  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$ ,  $\angle BOC = \theta$  ( $0 < \theta < \pi$ ) として, 次に答えよ.

(1) ベクトル  $\vec{OG}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  と  $s$  を用いて表せ.

(2) ベクトル  $\vec{OG}$  は平面  $ABC$  に垂直であるとする.

(a)  $s$  と  $\cos \theta$  の値を求めよ.

(b) 線分  $OG$  と  $BC$  の長さ, および  $\angle BAC$  を求めよ.

(c) 四面体  $OABC$  の体積  $V$  を求めよ.