2010年 工学部 第4問

$\boxed{4}$ 次に答えよ．ただし，対数は自然対数とする．必要ならば，$1.09 < \log 3 < 1.10$ を用いてよい．

(1) すべての $x > 0$ に対して，不等式

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x)$$

が成り立つことを示せ．

(2) 関数 $f(x) = x - \dfrac{x^2}{3} - \log(1+x)$ の $0 \leqq x \leqq 2$ における最大値，および最小値を求めよ．

(3) 方程式 $x - \dfrac{x^2}{3} = \log(1+x)$ は $0 < x < 2$ の範囲に解を1つだけもつことを示せ．

(4) (3) における解を α $(0 < \alpha < 2)$ とする．曲線 $y = x - \dfrac{x^2}{3}$ と曲線 $y = \log(1+x)$ で囲まれた図形 ($0 \leqq x \leqq \alpha$ の部分) の面積を S とする．また，曲線 $y = x - \dfrac{x^2}{3}$，$y = \log(1+x)$ と直線 $x = 2$ で囲まれた図形 ($\alpha \leqq x \leqq 2$ の部分) の面積を T とする．S と T の大小を比較せよ．