

2011年 情報工学部 第2問

2 実数  $a$  と行列  $A = \begin{pmatrix} a-2 & -2a \\ 4a & -2a+2 \end{pmatrix}$  がある.  $A$  が表す座標平面上の点の移動に関する以下の二つの条件を考える.

条件 1: 原点  $O$  以外のある点  $P$  が  $A$  によって  $P$  自身に移される.

条件 2: 原点  $O$  以外のある点  $Q$  が  $A$  によって線分  $OQ$  上の  $Q$  以外の点に移される.

以下の問いに答えよ.

(i) 条件 1 がみたされるとき,  $a$  の値を求めよ.

(ii) 条件 1, 条件 2 の両方がみたされるとき,  $a$  の値を求めよ.

(iii)  $a$  は (ii) で求めた値とする. 自然数  $n$  に対して, 点  $R_n$  を次のように定める.

- $R_1$  の座標を  $(4, 5)$  とする.
- $A$  によって  $R_{n-1}$  が移される先を  $R_n$  ( $n \geq 2$ ) とする.

$R_n$  の座標を  $(x_n, y_n)$  とするとき,  $x_n = \frac{12}{2^n} - 2$ ,  $y_n = \frac{16}{2^n} - 3$  であることを数学的帰納法を用いて証明せよ.