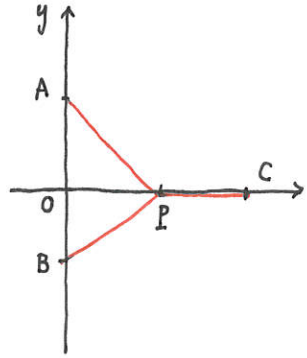
2013年 工学部 第2問

$\boxed{2}$ cを正の定数とする．平面上の原点O(0, 0)および3点A(0, 1)，B(0, −1)，C(c, 0)について下の問いに答えなさい．

(1) 点Pが線分OC上を動くとき，3点からの距離の2乗の和 $AP^2+BP^2+CP^2$ の最小値とそのときのPの座標を求めなさい．

(2) 点Qが線分OC上を動くとき，3点からの距離の和 AQ＋BQ＋CQ の最小値とそのときのQの座標を求めなさい．



(1) $P(t,0)$ $(0 \leqq t \leqq c)$ とおくと．

$$AP^2+BP^2+CP^2 = t^2+1+t^2+1+(c-t)^2$$
$$= 3t^2-2ct+2+c^2$$
$$= 3\left(t-\frac{c}{3}\right)^2+2+\frac{2}{3}c^2$$

∴ $P\left(\frac{c}{3},0\right)$ のとき 最小値 $\frac{2}{3}c^2+2$ //

(2) (1)と同様に $Q(t,0)$ $(0 \leqq t \leqq c)$ とおく．また $f(t)=AQ+BQ+CQ$ とする．

$$f(t)=\sqrt{t^2+1}+\sqrt{t^2+1}+c-t$$
$$=2\sqrt{t^2+1}+c-t$$

$$\therefore f'(t)=2t\cdot\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}-1=\frac{2t-\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}}$$

∴ $f'(t)=0$ となる $t\,(>0)$ は．$2t=\sqrt{t^2+1}$ すなわち $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(i) $c>\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき．

t	0	…	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	…	c
$f'(t)$		−	0	+	
$f(t)$	$c+2$	↘	$c+\sqrt{3}$	↗	$2\sqrt{c^2+1}$

(ii) $0<c\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき．

t	0	…	c
$f'(t)$		−	
$f(t)$	$c+2$	↘	$2\sqrt{c^2+1}$

(i)，(ii)より $c>\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき．$Q\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$ で最小値 $c+\sqrt{3}$，$0<c\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき．$Q(c,0)$ で最小値 $2\sqrt{c^2+1}$ //