長崎大学

2013年 第3問

3 nを2以上の整数とする．n個の実数a_1，a_2，…，a_nが与えられたとき，

$$P_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2,\quad Q_n={a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2$$

とおく．次に，$1\leqq i<j\leqq n$を満たすすべての番号i，jに対するa_ia_jの和をR_nとする．たとえば，$R_2=a_1a_2$，$R_3=a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3$である．同様に，$1\leqq i<j\leqq n$を満たすすべての番号i，jに対する$(a_i-a_j)^2$の和をS_nとする．たとえば，$S_2=(a_1-a_2)^2$，$S_3=(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+(a_2-a_3)^2$である．次の問いに答えよ．

(1) P_4をQ_4とR_4を使って表せ．

(2) すべての$n\geqq 2$に対して$S_n=(n-1)Q_n-2R_n$と表されることを，数学的帰納法で証明せよ．

(3) Q_4をP_4とS_4を使って表せ．

(4) $a_1+a_2+a_3+a_4=1$のとき，Q_4の最小値と，そのときのa_1，a_2，a_3，a_4の値をそれぞれ求めよ．