



2013年理系第5問

5 2次の正方行列 A を $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ で定める. $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, 点 $P_n(x_n, y_n)$ を

関係式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める. ただし, $x_0 = 1, y_0 = 0$ とする.

- (1) A^4 を求めよ.
- (2) $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = (E - A^{n+1})(E - A)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ. ただし, E は 2 次の単位行列とする.

- (3) 原点 O から P_n までの距離 OP_n が最大となる n を求めよ.