# 宮城教育大学

2012年 教育学部（中等数学） 第1問



$\boxed{1}$ 関数 $f(x) = ax^3 - (a+3)x + a + 3$ について，次の問いに答えよ．ただし $a$ は0でない実数とする．

(1) $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とする．$x$ の方程式 $f'(x) = 0$ が実数解をもつような $a$ の範囲を求め，またそのときの実数解をすべて求めよ．

(2) $x$ の方程式 $f(x) = 0$ が3個の異なる実数解をもつような $a$ の範囲を求めよ．

(1) $f'(x) = 3ax^2 - a - 3$

$\therefore f'(x) = 0 \iff 3ax^2 = a+3$

$\iff x^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{a}$ （$\because a \neq 0$ より）

$\therefore f'(x) = 0$ が実数解をもつのは，$\frac{1}{3} + \frac{1}{a} \geqq 0 \iff \frac{a+3}{3a} \geqq 0$

両辺 $3a^2$ $(>0)$ をかけた

$\iff a(a+3) \geqq 0$

$\iff \underline{a \leqq -3,\ 0 < a}$ //

このとき実数解は，$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{a+3}{3a}} & (a < -3,\ 0 < a \text{ のとき}) \\ x = 0 & (a = -3 \text{ のとき}) \end{cases}$ //

(2) (1)より，

(i) $a = -3$ のとき，

$f'(x) = -9x^2 \leqq 0$ $\therefore f(x)$ は単調減少より不適

(ii) $a < -3,\ 0 < a$ のとき，

極値をとるのは，$x = \pm\sqrt{\frac{a+3}{3a}}$

$\therefore f(x) = 0$ が3個の異なる実数解をもつ $\iff f\left(\sqrt{\frac{a+3}{3a}}\right) \cdot f\left(-\sqrt{\frac{a+3}{3a}}\right) < 0$

$$\iff \left\{\frac{a+3}{3}\sqrt{\frac{a+3}{3a}} - (a+3)\sqrt{\frac{a+3}{3a}} + a + 3\right\} \cdot \left\{-\frac{a+3}{3}\sqrt{\frac{a+3}{3a}} + (a+3)\sqrt{\frac{a+3}{3a}} + a + 3\right\} < 0$$

$$\iff (a+3)^2\left\{-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a+3}{3a}} + 1\right\}\left\{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a+3}{3a}} + 1\right\} < 0$$

$$\iff (a+3)^2 \cdot \frac{23a - 12}{27a} < 0$$

$a < -3$ より，$(a+3)^2 > 0$ $\therefore a(23a - 12) < 0$

$\therefore 0 < a < \frac{12}{23}$ これは場合分けの条件 $a < -3,\ 0 < a$ もみたす．

(i)，(ii)より，$\underline{0 < a < \frac{12}{23}}$ //