

2010年工学部第4問

4 次に答えよ。ただし、対数は自然対数とする。必要ならば、 $1.09 < \log 3 < 1.10$ を用いてよい。

(1) すべての $x > 0$ に対して、不等式

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x)$$

が成り立つことを示せ。

(2) 関数 $f(x) = x - \frac{x^2}{3} - \log(1+x)$ の $0 \leq x \leq 2$ における最大値、および最小値を求めよ。

(3) 方程式 $x - \frac{x^2}{3} = \log(1+x)$ は $0 < x < 2$ の範囲に解を1つだけもつことを示せ。

(4) (3)における解を α ($0 < \alpha < 2$) とする。曲線 $y = x - \frac{x^2}{3}$ と曲線 $y = \log(1+x)$ で囲まれた図形 ($0 \leq x \leq \alpha$ の部分) の面積を S とする。また、曲線 $y = x - \frac{x^2}{3}$ 、 $y = \log(1+x)$ と直線 $x = 2$ で囲まれた図形 ($\alpha \leq x \leq 2$ の部分) の面積を T とする。 S と T の大小を比較せよ。