東京農工大学

2014年 第2問

1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ a, bを実数とする．行列 $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ a & b\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a & b\\ b & -a\end{pmatrix}$が

$$AB=\begin{pmatrix}10 & 5\\ 5 & 0\end{pmatrix}$$

を満たしている．次の問いに答えよ．

(1) a, bの値を求めよ．ただし答えのみでよい．

(2) m, nは実数で，$m \fallingdotseq 0$, $n \fallingdotseq 0$とする．座標平面上の2点$\mathrm{S}_1(m,\ 0)$, $\mathrm{S}_2(0,\ n)$をとり，行列Aが表す1次変換によってS_1, S_2が移る点をそれぞれS_1', S_2'とする．2点S_1', S_2'を通る直線が2点S_1, S_2を通る直線に一致するとき，nをmの式で表せ．

(3) 2点$\mathrm{T}_1(-7,\ 0)$, $\mathrm{T}_2(0,\ 7)$を通る直線をℓとする．行列Bが表す1次変換によってT_1, T_2が移る点をそれぞれT_1', T_2'とし，2点T_1', T_2'を通る直線をℓ'とする．原点を中心とする半径rの円をCとする．Cとℓが異なる2点で交わり，かつCとℓ'も異なる2点で交わるとする．このようなrの値の範囲を求めよ．

(4) (3)において，円Cがℓを切り取る線分の長さをLとし，円Cがℓ'を切り取る線分の長さをL'とする．このようなL, L'の中で，Lが最も小さい自然数になるときのL'の値を求めよ．

(1) $AB=\begin{pmatrix}4a+3b & -3a+4b\\ a^2+b^2 & 0\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases}4a+3b=10\\ -3a+4b=5\\ a^2+b^2=5\end{cases}$ これを解いて，$\underline{a=1,\ b=2}$ //

(2) $\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4m\\ m\end{pmatrix}$ $\therefore S_1'(4m, m)$

$\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3n\\ 2n\end{pmatrix}$ $\therefore S_2'(3n, 2n)$

S_1', S_2'を通る直線は．$y=\dfrac{m-2n}{4m-3n}(x-4m)+m$ （$4m=3n$のときは条件をみたさず不適．$\therefore 4m \fallingdotseq 3n$とした）

これがS_1とS_2を通ればよいので，

$0=\dfrac{m-2n}{4m-3n}\cdot(-3m)+m$ $\therefore n=-\dfrac{m}{3}$

$n=\dfrac{m-2n}{4m-3n}\cdot(-4m)+m$ $\therefore n=-\dfrac{m}{3}$ 以上より．$\underline{n=-\dfrac{m}{3}}$ //

(3) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\ -14\end{pmatrix}$ $\therefore T_1'(-7, -14)$

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\ -7\end{pmatrix}$ $\therefore T_2'(14, -7)$

$\therefore \ell: y=x+7$, $\ell': y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{35}{3}$

$\therefore$ 点と直線のキョリ公式より

$\dfrac{|7|}{\sqrt{1+1}}<r$ かつ $\dfrac{|-35|}{\sqrt{1+3^2}}<r$ $\therefore$ $\underline{r>\dfrac{7\sqrt{10}}{2}}$ //

東京農工大学

2014年 第2問

$\boxed{2}$ a, bを実数とする．行列 $A=\begin{pmatrix}4&3\\a&b\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a&b\\b&-a\end{pmatrix}$が

$$AB=\begin{pmatrix}10&5\\5&0\end{pmatrix}$$

を満たしている．次の問いに答えよ．

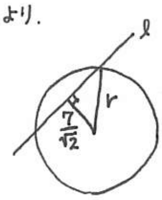
(1) a, bの値を求めよ．ただし答えのみでよい．

(2) m, nは実数で，$m \neq 0$, $n \neq 0$とする．座標平面上の2点$\mathrm{S}_1(m,\ 0)$, $\mathrm{S}_2(0,\ n)$をとり，行列Aが表す1次変換によってS_1, S_2が移る点をそれぞれ$\mathrm{S}_1{}'$, $\mathrm{S}_2{}'$とする．2点$\mathrm{S}_1{}'$, $\mathrm{S}_2{}'$を通る直線が2点S_1, S_2を通る直線に一致するとき，nをmの式で表せ．

(3) 2点$\mathrm{T}_1(-7,\ 0)$, $\mathrm{T}_2(0,\ 7)$を通る直線をℓとする．行列Bが表す1次変換によってT_1, T_2が移る点をそれぞれ$\mathrm{T}_1{}'$, $\mathrm{T}_2{}'$とし，2点$\mathrm{T}_1{}'$, $\mathrm{T}_2{}'$を通る直線をℓ'とする．原点を中心とする半径rの円をCとする．Cとℓが異なる2点で交わり，かつCとℓ'も異なる2点で交わるとする．このようなrの値の範囲を求めよ．

(4) (3)において，円Cがℓを切り取る線分の長さをLとし，円Cがℓ'を切り取る線分の長さをL'とする．このようなL, L'の中で，Lが最も小さい自然数になるときのL'の値を求めよ．

(4) (3)より．



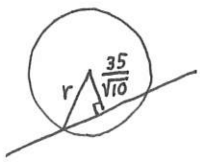
上の図より．

$\left(\frac{L}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right)^2=r^2$　$\therefore L^2=4r^2-98$

$r>\frac{7\sqrt{10}}{2}$ より．$L^2>4\cdot\frac{490}{4}-98$

$=392$

$\therefore$ Lが最も小さい自然数になるとき．$L^2=400$　$\therefore L=20$であり，このとき．$r^2=\frac{249}{2}$



このとき，左図より．

$\left(\frac{L'}{2}\right)^2+\left(\frac{35}{\sqrt{10}}\right)^2=r^2$

$\therefore \frac{L'^2}{4}+\frac{245}{2}=\frac{249}{2}$

$\therefore L'^2=8$　$\therefore \underline{L'=2\sqrt{2}}$ //