0001821908718999

佐賀大学

2014年 理工学部 第2問

数理 石井K

[2] 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について，次の問に答えよ.

$a_1=3,\quad b_1=4,$

$2a_{n+1}+b_{n+1}=3a_n+1,\quad -a_{n+1}-2b_{n+1}=3b_n-17\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(1) $c_n=a_n-a$, $d_n=b_n-b$ とおいて

$$\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる定数 a, b を求めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(1) $c_{n+1}=2c_n+d_n$, $d_{n+1}=-c_n-2d_n$ において

$c_n=a_n-a$, $d_n=b_n-b$ を代入して.

$a_{n+1}-a=2(a_n-a)+b_n-b$, $b_{n+1}-b=-a_n+a-2(b_n-b)$

$\therefore \begin{cases} a_{n+1}=2a_n+b_n-a-b & \cdots ① \\ b_{n+1}=-a_n-2b_n+a+3b & \cdots ② \end{cases}$

①×2＋② より. $2a_{n+1}+b_{n+1}=3a_n-a+b$

−①−2×② より $-a_{n+1}-2b_{n+1}=3b_n-a-5b$

これらと与えられた漸化式を比べて, $\begin{cases} -a+b=1 \\ -a-5b=-17 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{a=2\ ,\ b=3}$ //

(2) $c_1=a_1-2=1$, $d_1=b_1-3=1$

$\begin{pmatrix} c_{n+2} \\ d_{n+2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}$ $\quad\therefore \begin{pmatrix} c_{n+2} \\ d_{n+2} \end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}$ $\quad\therefore \begin{cases} c_{n+2}=3c_n \\ d_{n+2}=3d_n \end{cases}$

$\therefore$ n:奇数のとき. $c_n=3\cdot c_{n-2}=3^2\cdot c_{n-4}=\cdots=3^k\cdot c_{n-2k}=\cdots=3^{\frac{n-1}{2}}\cdot c_1=3^{\frac{n-1}{2}}$

同様に $d_n=3^{\frac{n-1}{2}}$

n:偶数のとき. $c_n=3\cdot c_{n-2}=3^2\cdot c_{n-4}=\cdots=3^k\cdot c_{n-2k}=\cdots=3^{\frac{n-2}{2}}\cdot c_2$

同様に $d_n=3^{\frac{n-2}{2}}\cdot d_2$

ここで $\begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ より. $c_n=3^{\frac{n}{2}}$, $d_n=-3^{\frac{n}{2}}$

(2) のつづき.

$\begin{cases} n:\text{奇数のとき. } a_n=3^{\frac{n-1}{2}}+2 \\ \qquad\qquad\qquad b_n=3^{\frac{n-1}{2}}+3 \end{cases}$

n:偶数のとき. $a_n=3^{\frac{n}{2}}+2$

$\underline{b_n=-3^{\frac{n}{2}}+3}$ //