



2013年工学部第4問

4 行列

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} p & -2 \\ 1 & q \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

が  $AB = BJ$  を満たすとき、次の問いに答えよ。ただし、 $p, q$  は定数であり、以下で用いる  $n$  は自然数である。

(1)  $p, q$  の値を求めよ。

(2)  $J^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  を示せ。

(3)  $A^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1+2n & -2n \\ 2n & 1-2n \end{pmatrix}$  を示せ。

(4) 行列  $A^n$  の表す 1 次変換により、 $xy$  平面上の点  $(p, 1), (-2, q)$  が、それぞれ点  $P_n, Q_n$  に移される。原点を  $O$  として、 $\overrightarrow{OP_n}$  と  $\overrightarrow{OQ_n}$  のなす角を  $\theta_n$  とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \theta_n$  を求めよ。