# 山形大学

2015年 医学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 座標平面上の点$(\sqrt{3},\ 0)$をA，点$(-\sqrt{3},\ 0)$をBとする．点$P(x_1,\ y_1)$が楕円$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$上にあり，$x_1>0$，$y_1>0$とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $|\overrightarrow{BP}|$を$x_1$を用いて表せ．

(2) $|\overrightarrow{AP}|+|\overrightarrow{BP}|$の値を求めよ．

(3) 楕円上の点Pにおける接線$\ell$の方程式を求めよ．

(4) 直線$\ell$の法線ベクトルの1つを$\vec{n}$とおく．このとき，$\overrightarrow{AP}$と$\vec{n}$のなす角は$\overrightarrow{BP}$と$\vec{n}$のなす角に等しいことを示せ．

(1) $|\overrightarrow{BP}|^2=(x_1+\sqrt{3})^2+y_1^2$

ここで，Pは楕円上の点より．$\dfrac{x_1^2}{4}+y_1^2=1 \iff y_1^2=1-\dfrac{x_1^2}{4}$

よって $|\overrightarrow{BP}|^2=x_1^2+2\sqrt{3}x_1+3+1-\dfrac{x_1^2}{4}$

$=\dfrac{3}{4}\left(x_1+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)^2$

$|\overrightarrow{BP}|\geqq 0$ より．$\underline{|\overrightarrow{BP}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_1+2}$ //

(2) (1)と同様に計算すると，$|\overrightarrow{AP}|^2=\dfrac{3}{4}\left(x_1-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)^2$

ここで，$0<x_1<2$，$\dfrac{4}{\sqrt{3}}>2$，$|\overrightarrow{AP}|\geqq 0$ より．$|\overrightarrow{AP}|=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_1+2$

$\therefore |\overrightarrow{AP}|+|\overrightarrow{BP}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_1+2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_1+2=\underline{4}$ //

(3) $\ell:\ \dfrac{x_1}{4}x+y_1y=1 \iff \ell:\ \underline{x_1x+4y_1y=4}$ //

(4) (3)より．$\vec{n}=(x_1,\ 4y_1)$，$\overrightarrow{AP}=(x_1-\sqrt{3},\ y_1)$，$\overrightarrow{BP}=(x_1+\sqrt{3},\ y_1)$

$\overrightarrow{AP}$と$\vec{n}$のなす角を$\theta_1\ (0\leqq\theta_1\leqq\pi)$，$\overrightarrow{BP}$と$\vec{n}$のなす角を$\theta_2\ (0\leqq\theta_2\leqq\pi)$とすると

$$\cos\theta_1=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AP}||\vec{n}|}=\frac{x_1^2-\sqrt{3}x_1+4y_1^2}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+2\right)\sqrt{x_1^2+16y_1^2}}=\frac{2}{\sqrt{x_1^2+16y_1^2}}$$

$$\cos\theta_2=\frac{\overrightarrow{BP}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{BP}||\vec{n}|}=\frac{x_1^2+\sqrt{3}x_1+4y_1^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+2\right)\sqrt{x_1^2+16y_1^2}}=\frac{2}{\sqrt{x_1^2+16y_1^2}}$$

$\therefore$ $0\leqq\theta_1\leqq\pi$，$0\leqq\theta_2\leqq\pi$ なので．$\cos\theta_1=\cos\theta_2 \iff \theta_1=\theta_2$

$\therefore$ $\overrightarrow{AP}$と$\vec{n}$のなす角は$\overrightarrow{BP}$と$\vec{n}$のなす角に等しい ▨