2010年 工学部 第1問

$\boxed{1}$ cを定数とし，関数 $f(x)$，$g(x)$ を $f(x) = -x + c$，$g(x) = -x^2 + 2x + 3$ と定める．また，直線 $y = f(x)$ は放物線 $y = g(x)$ の接線であるとする．

(1) c の値を求めよ．

(2) 直線 $y = f(x)$，放物線 $y = g(x)$，および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) $y=f(x)$ が $y=g(x)$ の接線であることより

方程式 $f(x)-g(x)=0$ は重解をもつ

$-x+c-(-x^2+2x+3)=0$

すなわち，$x^2-3x+c-3=0$ $\cdots$ (*)

判別式を D とおくと，

$D=(-3)^2-4(c-3)=0$

$\therefore$ $\underline{c=\frac{21}{4}}$ //

(2) $g(x)=-(x^2-2x)+3$

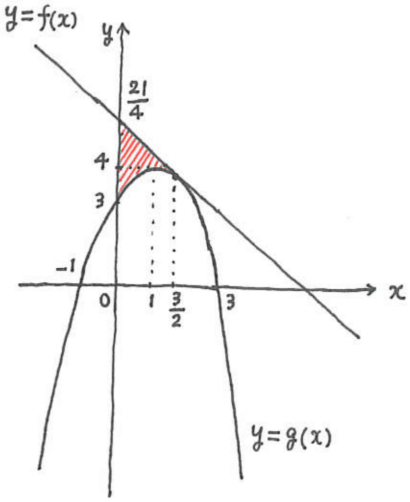
$\quad = -(x-1)^2+4$

$\therefore$ 頂点は $(1,4)$

(*) に $c=\frac{21}{4}$ を代入すると，

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=0$ $\therefore$ $x=\frac{3}{2}$

$\therefore$ 接点は $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$



$\therefore$ 右の図より，

$$S=\int_0^{\frac{3}{2}} -x+\frac{21}{4}-(-x^2+2x+3)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{3}{2}} x^2-3x+\frac{9}{4}\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x\right]_0^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{9}{8}-\frac{27}{8}+\frac{27}{8}$$

$$=\underline{\frac{9}{8}}\ //$$