0001981638108999

横浜国立大学

2015年 経済 第2問　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) 2次関数 $f(x)$ が

$$f(x) = 6x^2 - \underbrace{\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)^2}_{\text{定数}}$$

をみたすとき，$f(x)$ を求めよ．

(2) 2次関数 $g(x)$ が

$$g(x) = 4x^2 - \underbrace{\left(\int_0^1 |g(t)|\,dt\right)^2}_{\text{定数}}$$

をみたすとき，$g(x)$ を求めよ．

(1) $f(x) = 6x^2 - a$ とおくと．$\left(\underbrace{a = \left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)^2}_{\text{よって } a \geqq 0} \text{ とした} \right)$

$f(x) = 6x^2 - \left(\int_0^1 6t^2 - a\,dt\right)^2$

$= 6x^2 - \left(\left[2t^3 - at\right]_0^1\right)^2$

$= 6x^2 - (2-a)^2$

$= 6x^2 - (a-2)^2$

$\therefore$ 定数項を比較して，$a = (a-2)^2$

$\therefore (a-4)(a-1) = 0 \quad \therefore \underline{a = 1, 4}$ これは $a \geqq 0$ をみたしている．

$\therefore \underline{f(x) = 6x^2 - 1,\ 6x^2 - 4}$ //

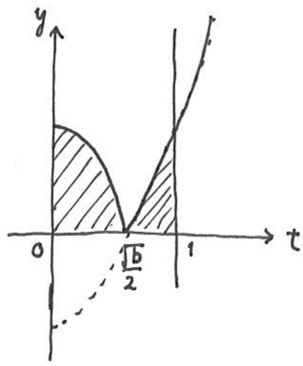
(2) $g(x) = 4x^2 - b$ とおく．$(b \geqq 0)$

$\left(b = \left(\int_0^1 |g(t)|\,dt\right)^2 \text{ とした} \right)$

このとき．$b = \left(\int_0^1 |4t^2 - b|\,dt\right)^2$

$4x^2 - b = 0$ となるのは．$x = \pm\frac{\sqrt{b}}{2}$ なので，

(i) $0 < \frac{\sqrt{b}}{2} < 1$ すなわち $0 < b < 4$ のとき．



$b = \left(\int_0^{\frac{\sqrt{b}}{2}} -4t^2 + b\,dt + \int_{\frac{\sqrt{b}}{2}}^1 4t^2 - b\,dt\right)^2$

$= \left(\left[-\frac{4}{3}t^3 + bt\right]_0^{\frac{\sqrt{b}}{2}} + \left[\frac{4}{3}t^3 - bt\right]_{\frac{\sqrt{b}}{2}}^1\right)^2$

$= \left(-\frac{4}{3}\cdot\frac{b}{4}\cdot\frac{\sqrt{b}}{2} + \frac{b\sqrt{b}}{2} + \frac{4}{3} - b - \frac{4}{3}\cdot\frac{b}{4}\cdot\frac{\sqrt{b}}{2} + \frac{b\sqrt{b}}{2}\right)^2$

$= \left(\underline{\frac{2}{3}b\sqrt{b} + \frac{4}{3} - b}\right)^2$ かっこの中身は正なので

$\therefore \sqrt{b} = \frac{2}{3}b\sqrt{b} + \frac{4}{3} - b$

$c = \sqrt{b}$ とおくと，$\frac{1}{3}(2c^3 - 3c^2 - 3c + 4) = 0$

$\therefore (c-1)(2c^2 - c - 4) = 0 \quad 0 < c < 2$ より．$c = 1,\ \frac{1+\sqrt{33}}{4} \quad \therefore b = 1,\ \frac{17+\sqrt{33}}{8}$

0001981638108999

横浜国立大学

2015年 経済 第2問

2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) 2次関数 $f(x)$ が

$$f(x) = 6x^2 - \left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)^2$$

をみたすとき，$f(x)$ を求めよ．

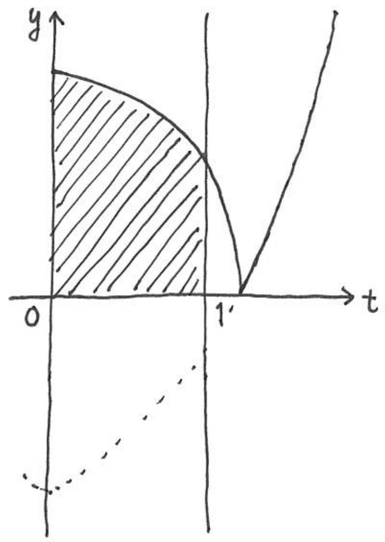
(2) 2次関数 $g(x)$ が

$$g(x) = 4x^2 - \left(\int_0^1 |g(t)|\,dt\right)^2$$

をみたすとき，$g(x)$ を求めよ．

(2)のつづき．

(ii) $\frac{\sqrt{b}}{2} \geqq 1$ すなわち $b \geqq 4$ のとき．



$$b = \left(\int_0^1 |4t^2 - b|\,dt\right)^2$$

$$= \left(\int_0^1 b - 4t^2\,dt\right)^2$$

$$= \left(\left[bt - \frac{4}{3}t^3\right]_0^1\right)^2$$

$$= \left(b - \frac{4}{3}\right)^2$$

$$\therefore\ b^2 - \frac{11}{3}b + \frac{16}{9} = 0$$

$$\therefore\ 9b^2 - 33b + 16 = 0$$

$$\therefore\ b = \frac{33 \pm \sqrt{33^2 - 4\cdot 9\cdot 16}}{18}$$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{57}}{6}$$

これは $b \geqq 4$ とならないので不適

(i)，(ii) より

$$g(x) = 4x^2 - 1,\ 4x^2 - \frac{17 + \sqrt{33}}{8}$$ //