0001975184208999

広島大学

2015年 理系 第2問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 座標平面上の放物線

$$C_n : y = x^2 - p_n x + q_n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を考える．ただし，p_n，q_n は

$$p_1^2 - 4q_1 = 4, \quad p_n^2 - 4q_n > 0 \qquad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

を満たす実数とする．C_n と x 軸との二つの交点を結ぶ線分の長さを ℓ_n とする．また，C_n と x 軸で囲まれた部分の面積 S_n は

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) C_n の頂点の y 座標を ℓ_n を用いて表せ．

(2) 数列 $\{\ell_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $p_n = n\sqrt{n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\log\left(-\frac{2q_n}{n^2}\right)$ を求めよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数である．

(1) C_n と x 軸の交点の x 座標を α_n, β_n $(\alpha_n < \beta_n)$ とおくと，解と係数の関係より，

$\alpha_n + \beta_n = p_n$，$\alpha_n\beta_n = q_n$

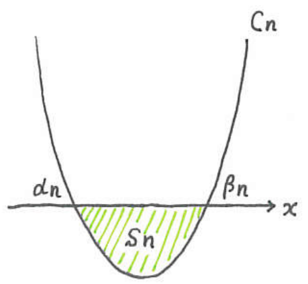
$\therefore \ell_n = \beta_n - \alpha_n$ であるから，

$$\ell_n^2 = (\alpha_n + \beta_n)^2 - 4\alpha_n\beta_n$$
$$= p_n^2 - 4q_n \ (>0)$$

$$\therefore \ell_n = \sqrt{p_n^2 - 4q_n}$$

$$C_n : y = \left(x - \frac{p_n}{2}\right)^2 - \frac{p_n^2}{4} + q_n$$

$\therefore$ 頂点の y 座標は，$-\frac{1}{4}(p_n^2 - 4q_n) = \underline{-\frac{1}{4}\ell_n^2}$ //



(2) $$S_n = \int_{\alpha_n}^{\beta_n} -x^2 + p_n x - q_n \, dx$$

$$= -\int_{\alpha_n}^{\beta_n} (x-\alpha_n)(x-\beta_n)\,dx$$

α_n, β_n が $x^2 - p_n x + q_n = 0$ の解であることから．

$$= \frac{1}{6}(\beta_n - \alpha_n)^3$$

$\frac{1}{6}$ 公式

0001975184208999

広島大学

2015年 理系 第2問　**2枚目／2枚**

数理 石井K

2 座標平面上の放物線

$$C_n : y = x^2 - p_n x + q_n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を考える．ただし，p_n，q_n は

$$p_1^2 - 4q_1 = 4, \quad p_n^2 - 4q_n > 0 \qquad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

を満たす実数とする．C_n と x 軸との二つの交点を結ぶ線分の長さを ℓ_n とする．また，C_n と x 軸で囲まれた部分の面積 S_n は

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) C_n の頂点の y 座標を ℓ_n を用いて表せ．

(2) 数列 $\{\ell_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $p_n = n\sqrt{n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\log\left(-\frac{2q_n}{n^2}\right)$ を求めよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数である．

(2) のつづき．$\therefore S_n = \frac{1}{6}\ell_n^3$

$$\therefore \frac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n}\right)^3 = \left(\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3 \qquad \therefore \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = \frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$\therefore \ell_{n+1} = \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n}\cdot\frac{\ell_n}{\ell_{n-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{\ell_3}{\ell_2}\cdot\frac{\ell_2}{\ell_1}\cdot\ell_1$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)\cdot\cdots 3}{\sqrt{n+1}\cdot n(n-1)\cdot\cdots 2\cdot\sqrt{1}}\cdot\ell_1$$

$$= \frac{(n+2)\sqrt{n+1}}{2}\cdot 2 \quad (\because p_1^2 - 4q_1 = 4 \text{ より. } \ell_1^2 = 4)$$

$\therefore \ell_{n+1} = (n+2)\sqrt{n+1}$　　$\therefore \underline{\ell_n = (n+1)\sqrt{n}}$ //　これは $n=1$ のときも成り立つ

(3) $\ell_n = \sqrt{p_n^2 - 4q_n}$ に $p_n = n\sqrt{n}$ を代入して．$q_n = -\frac{2n^2+n}{4}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n\log\left(-\frac{2q_n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\log\underbrace{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}_{\to e}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}} \text{ //}$$