



2010年理(数理科学)・医第2問

2 次の初項と漸化式で定まる数列 $\{a_n\}$ を考える.

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = e^{-a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ここで, e は自然対数の底で, $1 < e < 3$ である. このとき, 次の問いに答えなさい.

- (1) すべての自然数 n について $\frac{1}{3} < a_n < 1$ が成り立つことを示しなさい.
- (2) 方程式 $x = e^{-x}$ はただ 1 つの実数解をもつことと, その解は $\frac{1}{3}$ と 1 の間にあることを示しなさい.
- (3) 関数 $f(x) = e^{-x}$ に平均値の定理を用いることによって, 次の不等式が成り立つことを示しなさい.

$\frac{1}{3}$ と 1 との間任意の実数 x_1, x_2 について,

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq e^{-\frac{1}{3}} |x_2 - x_1|$$

- (4) 数列 $\{a_n\}$ は, 方程式 $x = e^{-x}$ の実数解に収束することを示しなさい.