

2015年医学部第1問

1 以下の(1)~(4)の ~ に適切な値を答えなさい。ただし、 e は自然対数の底とする。

(1) $A = e^2$ とするとき、

$$8\left(1 + \cos^3 \frac{\pi}{18}\right) \log_A e - \frac{3}{2}\left(1 + \cos \frac{\pi}{18}\right) \log_e A = \boxed{1}$$

である。

(2) b を正の定数、 x を正の実数とする。方程式 $\log_e x = bx$ が異なる2つの実数解をもつのは $0 < b < \boxed{2}$ のときである。

(3) 数列 $\{c_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を、初項1、公差2の等差数列とする。数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n に対して $T_n = \log_e S_n$ 、 $U_n = e^{T_n}$ と定義する。数列 $\{U_n\}$ の初項から第24項までの和の値は となる。

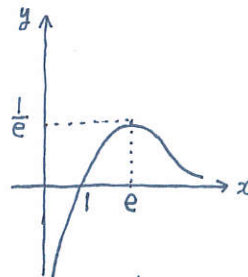
4900

(4) 定積分 $\int_0^D \frac{2e^x}{2e^x + 3} dx$ の値は である。ただし、 $D = \log_e 3$ とする。

$$\begin{aligned} (1) \text{ (与式)} &= \left(8 + 8 \cos^3 \frac{\pi}{18}\right) \cdot \log_{e^2} (e^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{18}\right) \cdot \log_e e^2 \\ &= 1 + 4 \cos^3 \frac{\pi}{18} - 3 \cos \frac{\pi}{18} \\ &= 1 + \cos \frac{\pi}{6} \quad (\text{3倍角の公式}) \\ &= \underline{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} \end{aligned}$$

$$(2) f(x) = \frac{\log x}{x} \text{ とおくと、} f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

x	(0)	\dots	e	\dots	(∞)
$f(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$(-\infty)$	\nearrow	$\frac{1}{e}$	\searrow	(0)



$\therefore y = b$ と、このグラフの交点の数が2つになればよいから、 $0 < b < \frac{1}{e}$ 。

$$(3) C_n = 2n - 1 \quad \therefore S_n = \frac{n}{2} (1 + 2n - 1) = n^2 \quad \therefore T_n = \log n^2 \quad \therefore U_n = n^2$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{24} U_k = \sum_{k=1}^{24} k^2 = \frac{1}{6} \cdot 24 \cdot 25 \cdot 49 = \underline{4900}$$

$$\begin{aligned} (4) \text{ (与式)} &= \int_0^D \frac{(2e^x + 3)'}{2e^x + 3} dx \\ &= \left[\log (2e^x + 3) \right]_0^{\log 3} \\ &= \log 9 - \log 5 \end{aligned}$$