



2014年工学部・生命環境(生命工)第1問

数理
石井K

1 次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x) = e^{1+\sin^2 x}$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。
 (2) 条件 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
 (3) 関数 $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ の増減, 極値, グラフの凹凸, 変曲点および漸近線を調べ, 曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ。

$$(1) f'(x) = (1 + \sin^2 x)' e^{1 + \sin^2 x} \\ = \underline{2 \sin x \cos x e^{1 + \sin^2 x}} //$$

$$(2) a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) \quad \therefore \text{数列 } \{a_{n+1} - a_n\} \text{ は初項 } a_2 - a_1 = 1, \\ \text{公比 } 2 \text{ の等比数列.}$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = 2^{n-1} \dots \textcircled{1}$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = a_{n+1} - 2a_n = \dots = a_2 - 2a_1 = 0$$

$$\therefore a_{n+1} - 2a_n = 0 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より, } \underline{a_n = 2^{n-1}} //$$

$$(3) f'(x) = \frac{4(x^2+1) - 4x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-4(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(8x-16x)(x^2+1)^2 - (4-4x^2) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

\therefore 増減表は右のようになる。

極大値 2 ($x=1$ のとき), 極小値 -2 ($x=-1$ のとき) //

変曲点 $(0, 0), (\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3})$ (複号同順) //

漸近線は $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ より, x 軸 //

グラフは右のようになる。

x	\dots	$-\sqrt{3}$	\dots	-1	\dots	0	\dots	1	\dots	$\sqrt{3}$	\dots
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	$-\sqrt{3}$	\swarrow	-2	\nearrow	0	\nwarrow	2	\searrow	$\sqrt{3}$	\swarrow

極小 極大

