0001873816218999

松山大学

2013年 薬学部 第3問

増田

$\boxed{3}$ 4点 O(0, 0), A(5, 0), B(5, 4), C(0, 4) を頂点とする長方形 OABC の辺 AB, BC 上にそれぞれ点 P(5, m), Q(n, 4) がある．また，∠POQ = 45°, ∠AOP = θ とする．

(1) $\tan\theta$ を m で表すと $\tan\theta = \dfrac{m}{\boxed{\text{ア}}}$ 5 である．$\tan(\theta+45^\circ)$ を n で表すと $\tan(\theta+45^\circ) = \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{n}$ 4 である．

(2) (1)の結果を利用して，m を n で表すと，$m = \dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{n+4} - \boxed{\text{オ}}$ 40 5 である．また，n の値の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} \leqq n \leqq \boxed{\text{ク}}$ $\frac{9}{4}$ 4 である．

(3) △OPQ の面積を S とするとき，S を n で表すと

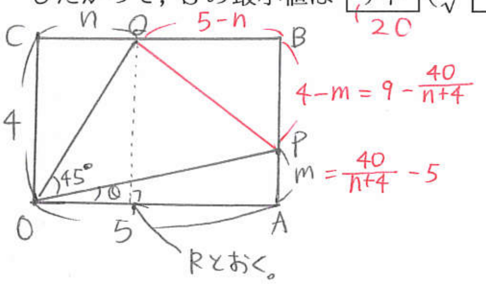
$$S = \boxed{\text{ケコ}} - \frac{\boxed{\text{サシ}}\,n}{n+4} + \frac{\boxed{\text{ス}}}{2}n$$
10 20 5

$$= \frac{\boxed{\text{セ}}}{2}(n+4) - \frac{\boxed{\text{ソタ}}(n+4) - \boxed{\text{チツ}}}{n+4}$$
5 20 80

$$= \frac{\boxed{\text{セ}}}{2}(n+4) + \frac{\boxed{\text{チツ}}}{n+4} - \boxed{\text{ソタ}}$$ となる．
5 80 20

したがって，S の最小値は $\boxed{\text{テト}}(\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}-1)$ となり，そのとき，$n = \boxed{\text{ニ}}(\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}-1)$ である．
20 2 4 2

(3)つづき
Sが最小値をとるのは
$\frac{5}{2}(n+4) = \frac{80}{n+4}$ のとき
$(n+4)^2 = 32$
$n+4 = 4\sqrt{2}$
$\therefore\ n = 4(\sqrt{2}-1)$



(1) $\tan\theta = \frac{AP}{OA} = \frac{m}{5}$, $\tan(\theta+45^\circ) = \frac{RQ}{OR} = \frac{4}{n}$

(2) $\tan(\theta+45^\circ) = \frac{\tan\theta + \tan45^\circ}{1-\tan\theta\tan45^\circ} = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

$\tan\theta = \frac{m}{5}$ を，$\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} = \frac{4}{n}$ に代入すると

$n\left(1+\frac{m}{5}\right) = 4\left(1-\frac{m}{5}\right)$

$n(5+m) = 4(5-m)$

$(n+4)m = 20-5n$

$n+4 \neq 0$ より，

$m = \frac{-5n+20}{n+4} = \frac{-5(n+4)+40}{n+4}$

$= \frac{40}{n+4} - 5$

また，$0 \leqq m \leqq 4$ より，

$5 \leqq \frac{40}{n+4} \leqq 9$

$\begin{cases} 5(n+4) \leqq 40 \longrightarrow n \leqq 4 \\ 9(n+4) \geqq 40 \longrightarrow n \geqq \frac{4}{9} \end{cases}$

よって $\frac{4}{9} \leqq n \leqq 4$

(3) S = (長方形OABC) − △OAP − △PBQ − △OCQ

$= 5\times4 - \frac{1}{2}\times5\times\left(\frac{40}{n+4}-5\right) - \frac{1}{2}\times(5-n)\times\left(9-\frac{40}{n+4}\right) - \frac{1}{2}\times4\times n$

$= 10 - \frac{20n}{n+4} + \frac{5}{2}n$

$= \frac{5}{2}(n+4) - \frac{20n}{n+4}$

$= \frac{5}{2}(n+4) - \frac{20(n+4)-80}{n+4}$

$= \frac{5}{2}(n+4) + \frac{80}{n+4} - 20$

$\geqq 2\sqrt{\frac{5}{2}(n+4)\cdot\frac{80}{n+4}} - 20$ 相加相乗平均

$= 20(\sqrt{2}-1)$