0002111188887999

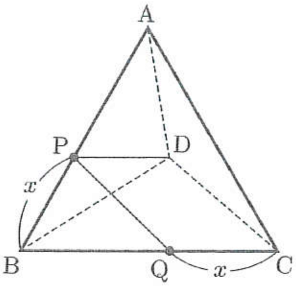
松山大学

2014 年 薬学部 第 3 問

増田

$\boxed{3}$ 次の空所 $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ソ}}$ を埋めよ.

図のような一辺が長さ 1 の正四面体 ABCD がある.



(1) A から底面 BCD に垂線 AH を下ろすとき，AH の長さは $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$ となり，正四面体 ABCD の体積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ である.

$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　$\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

(2) 辺 AB 上に点 P，辺 BC 上に点 Q を BP = CQ = x となるようにとる. 四面体 PBQD の体積は $x = \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ のときに最大となり，これは正四面体 ABCD の体積の $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ 倍である.

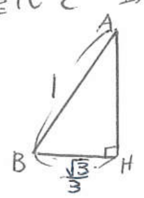
$\dfrac{1}{2}$　$\dfrac{1}{4}$

(3) $x = \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ のとき，$\angle\text{DPQ} = \theta$ とすると，$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ であり，△DPQ の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ である.

$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　$\dfrac{\sqrt{11}}{16}$

(1) 点 H は正三角形 BCD の重心と一致するので $BH = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$AH = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$



底面 BCD の面積は $1 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

正四面体 ABCD の体積は

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

(2) 底面 BDQ は、底面 BCD の $(1-x)$ 倍

P から底面 BDQ に下ろした垂線の長さは、AH の x 倍

よって四面体 PBQD の体積は正四面体 ABCD の体積の $x(1-x)$ 倍。

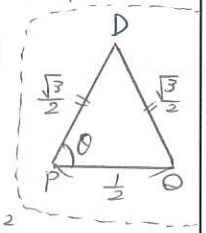
$$x(1-x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

これは $x = \dfrac{1}{2}$ のときに最大となり、

正四面体 ABCD の体積の $\dfrac{1}{4}$ 倍である。

(3) $x = \dfrac{1}{2}$ のとき、$DP = PQ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$PQ = \dfrac{1}{2}$



余弦定理より

$$\cos\theta = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{11}{12}}$$

$$(\triangle\text{DPQ の面積}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\frac{11}{12}} = \frac{\sqrt{11}}{16}$$