



2011年全学部第3問

3 空欄 オ , カ , キ に当てはまるものを解答群の中から選び、それ以外の空欄には、当てはまる0から9までの数字を入れよ。

座標平面上に3つの放物線 $C_1: y = x^2$, $C_2: y = -x^2 - 8x - 8$, $C_3: y = -x^2 + ax + b$ がある。 C_1 と C_3 は $t > 0$ の範囲にただ1つの共有点 (t, t^2) を持ち、直線 l は点 P で C_2 に接し、なおかつ点 Q で C_3 に接しているとする。次の問に答えよ。

- (1) C_1 と C_2 の共有点は $(-\text{ア}, \text{イ})$ である。また、 C_1 と C_3 もただ1つの共有点を持つことから $a = \text{ウ}t$, $b = -\text{エ}t^2$ である。
- (2) 点 P, Q の x 座標をそれぞれ α, β とする。 l は点 P における C_2 の接線および点 Q における C_3 の接線に等しい。これら2つの接線の傾きおよび y 軸との交点がともに等しいことから

$$\beta - \alpha = \text{オ}, \quad \beta^2 - \alpha^2 = \text{カ}$$

が成り立つ。したがって、 $\beta + \alpha = \text{キ}$ である。これより、直線 l の方程式は

$$y = (t - \text{ク})x + \frac{t^2 + \text{ケコ}t + \text{サ}}{\text{シ}}$$

である。

- (3) C_3 と x 軸によって囲まれる部分の面積を S_1 , C_1 と直線 l によって囲まれる部分の面積を S_2 とすると、

$$S_1 = \frac{\sqrt{\text{ス}}}{\text{セ}} \cdot \text{ソ} t^3$$

$$S_2 = \frac{\sqrt{\text{ス}}}{\text{セ}} \cdot (t + \text{タ})^3$$

である。 $S_1 - S_2$ は $t = \frac{\text{チ} + \text{ツ}}{\text{ト}} \sqrt{\text{テ}}$ のときに最小値をとる。

オ, カ, キの解答群

- ① $t + 2$ ② $t - 2$ ③ $2t + 4$ ④ $t + \sqrt{2}$ ⑤ $t - \sqrt{2}$
 ⑥ $t^2 - 2$ ⑦ $t^2 - 4$ ⑧ $t^2 - 8$ ⑨ $2t^2 - 4$ ⑩ $2t^2 - 8$

