明治大学

2016年 全学部（理工） 第2問

$\boxed{2}$ 次の空欄 $\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$，$\boxed{キ}$，$\boxed{ケ}$，$\boxed{コ}$ に当てはまるものをそれぞれ指定された解答群の中から選べ．それ以外の空欄には，当てはまる0から9までの数字を入れよ．

i は虚数単位とし，α は0でない複素数とする．複素数平面上で実部と虚部がともに整数となる点を格子点と呼ぶことにする．

(1) 複素数平面上に4点 O(0)，A(α)，B($\alpha + i\alpha$)，C($i\alpha$) をとると，四角形OABCは正方形になる．このとき，次が成立する．

(i) α の実部を a，虚部を b とおく．Aが格子点であるとき，Bは $\boxed{ア}$．

(ii) $\alpha + i\alpha$ の実部を a，虚部を b とおく．Bが格子点であるとき，Aは $\boxed{イ}$．

(2) $\gamma = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とおくと，$\overline{\gamma} = \gamma^{-1} = \cos\dfrac{2\pi}{5} - i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ である．

$$\gamma^4 + \gamma^3 + \gamma^2 + \gamma + 1 = \frac{\gamma^5 - 1}{\gamma - 1} = \boxed{ウ}$$

であることを用いれば，

$$\gamma + \gamma^{-1} = \frac{-\boxed{エ} + \sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}$$

がわかる．

複素数平面上に5点 O(0)，A(α)，B($\alpha + \gamma\alpha$)，C($\alpha + \gamma\alpha + \gamma^2\alpha$)，D($\boxed{キ}$) をとると，五角形OABCDは正五角形になる．

以下，α の実部を a，虚部を b とおく．Aは格子点であるとする．このとき，

$$|\alpha + \gamma\alpha|^2 = (a^2 + b^2)(\gamma + \gamma^{-1} + \boxed{ク})$$

であるので，Bは $\boxed{ケ}$．また，$\mathrm{OC}^2 = \mathrm{OB}^2$ であるので，Cは $\boxed{コ}$．

ア，イ，ケ，コの解答群

⓪ 必ず格子点になる
① a，b が共に偶数のときのみ格子点になる
② a，b が共に奇数のときのみ格子点になる
③ $a+b$ が偶数のときのみ格子点になる
④ $a+b$ が奇数のときのみ格子点になる
⑤ 格子点にはならない

キの解答群

⓪ $\gamma\alpha$	① $-\gamma\alpha$	② $\gamma^2\alpha$	③ $\gamma^3\alpha$	④ $\gamma^5\alpha$
⑤ $\gamma^{-1}\alpha$	⑥ $-\gamma^{-1}\alpha$	⑦ $-\gamma^{-2}\alpha$	⑧ $\alpha+\gamma^2\alpha$	⑨ $\alpha-\gamma^2\alpha$