



2013年第2問

2 n は自然数とする.(1) $1 \leq k \leq n$ を満たす自然数 k に対して

$$\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \sin 2nt \cos t \, dt = (-1)^{k+1} \frac{2n}{4n^2-1} \left(\cos \frac{k}{2n}\pi + \cos \frac{k-1}{2n}\pi \right)$$

が成り立つことを示せ.

(2) 媒介変数 t によって

$$x = \sin t, \quad y = \sin 2nt \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

と表される曲線 C_n で囲まれた部分の面積 S_n を求めよ. ただし必要なら

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k}{2n}\pi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tan \frac{\pi}{4n}} - 1 \right) \quad (n \geq 2)$$

を用いてよい.

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.