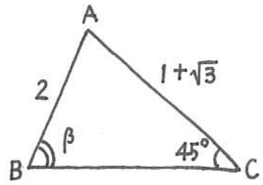
2016年 文系 第3問

3 △ABCが，$AB=2$，$AC=1+\sqrt{3}$，$\angle ACB=45^\circ$ をみたすとする．

(1) $\beta=\angle ABC$ とおくとき，$\sin\beta$ および $\cos 2\beta$ の値を求めよ．

(2) (1)の β の値をすべて求めよ．

(3) △ABCの外接円の中心をOとする．△ABCが鋭角三角形であるとき，$\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ をみたす実数 s，t を求めよ．



(1) 正弦定理より，

$$\frac{2}{\sin 45^\circ}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sin\beta} \qquad \therefore \underline{\sin\beta=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}} \text{〃}$$

$$\cos 2\beta = 1-2\sin^2\beta$$
$$=1-2\cdot\frac{8+4\sqrt{3}}{16}$$
$$=\underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \text{〃}$$

(2) $0<\beta<135^\circ$ より，$0<2\beta<270^\circ$

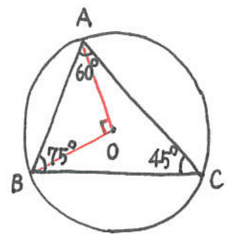
$\therefore \cos 2\beta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ より，$2\beta=150^\circ, 210^\circ$ $\quad \therefore \underline{\beta=75^\circ, 105^\circ}$ 〃

(3) 正弦定理より，

$$\frac{2}{\sin 45^\circ}=2R \qquad \therefore R=\sqrt{2}$$

$\therefore |\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{2}$，また $\angle ACB=45^\circ$ より，$\angle AOB=90^\circ$

よって，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$



ここで

$|\overrightarrow{OC}|^2=s^2|\overrightarrow{OA}|^2+\cancel{2st\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}+t^2|\overrightarrow{OB}|^2$ に代入して

$2=2s^2+2t^2 \qquad \therefore s^2+t^2=1 \quad \cdots ①$

← 必要なかった

△ABCが鋭角三角形なので (2)より $\beta=75^\circ$ $\quad\therefore \angle AOC=150^\circ$

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\cos 150^\circ=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3}$

一方，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cdot(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB})=2s$

$\therefore 2s=-\sqrt{3} \quad\cdots ②$

同様に，$\angle BAC=60^\circ$ より，$\angle BOC=120^\circ$ $\quad\therefore \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos 120^\circ=-1$

一方，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB})=2t$

$\therefore 2t=-1 \quad\cdots ③$ $\qquad$ ②，③より，$\underline{s=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ t=-\frac{1}{2}}$ 〃