

2013年第5問


 数理
石井

 5 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が, $a_1 = 5$, $b_1 = 1$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + b_n & \dots \textcircled{1} \\ b_{n+1} = a_n + 5b_n & \dots \textcircled{2} \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとき, 一般項 a_n , b_n を求めよ.

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ より. } a_{n+1} + b_{n+1} = 6(a_n + b_n)$$

 \therefore 数列 $\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 = 6$, 公比 6 の等比数列なので

$$a_n + b_n = 6^n \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より. } a_{n+1} - b_{n+1} = 4(a_n - b_n)$$

 \therefore 数列 $\{a_n - b_n\}$ は初項 $a_1 - b_1 = 4$, 公比 4 の等比数列なので

$$a_n - b_n = 4^n \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \text{ より. } 2a_n = 6^n + 4^n \quad \therefore a_n = \frac{4^n + 6^n}{2} //$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{4} \text{ より. } 2b_n = 6^n - 4^n \quad \therefore b_n = \frac{6^n - 4^n}{2} //$$