



2012年 理学部 第3問

3 数列  $\{a_n\}$  を  $a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n e^{-t} dt$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) と定義する. ただし,  $e$  は自然対数の底とする. 次の各問に答えよ.

(1)  $a_1$  を求めよ.

(2)  $0 \leq t \leq 1$  のとき  $t^n \leq t$  であることを用いて  $a_n \leq \frac{a_1}{n!}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を示せ.

(3) 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ.

(4)  $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{e(n+1)!}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を示せ.

(5) 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$  を求めよ.