0001737542628999

大阪府立大学

2014年 第3問

$\boxed{3}$ $x \geqq 0$ で定義された関数

$$f_n(x) = x^a - x^{a+\frac{1}{n}}$$

を考える．ただし，a は正の実数とし，n は自然数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 区間 $[0,\ 1]$ において，$f_n(x)$ の最大値を与える x の値を x_n とおく．x_n を求めよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

(1) $f_n'(x) = ax^{a-1} - \left(a+\frac{1}{n}\right)x^{a+\frac{1}{n}-1}$

$= x^{a-1}\left\{a - \left(a+\frac{1}{n}\right)x^{\frac{1}{n}}\right\}$

$= 0$ となるのは，

$\left(a+\frac{1}{n}\right)x^{\frac{1}{n}} = a \iff x^{\frac{1}{n}} = \dfrac{a}{a+\frac{1}{n}}$

$\iff x = \left(\dfrac{an}{an+1}\right)^n$

$\therefore$ $[0,1]$ で $f_n'(x) = 0$ となるのは，$x = 0,\ \left(\dfrac{an}{an+1}\right)^n$

x	0	$\cdots$	$\left(\frac{an}{an+1}\right)^n$	$\cdots$	1
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$\therefore$ $x_n = \left(\dfrac{an}{an+1}\right)^n$ //

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{an}{an+1}\right)^n$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{an+1}{an}\right)^{-n}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{an}\right)^{an}\right\}^{-\frac{1}{a}}$

$= e^{-\frac{1}{a}}$ //