大阪市立大学

2016年 文系 第3問

$\boxed{3}$ a, bは実数で, $b>0$とする. 放物線$y=x^2$と直線$y=ax+b$の2つの交点をP, Qとおく. 次の問いに答えよ.

(1) 線分PQの長さを, aとbを用いて表せ.

(2) 直線$y=ax+b$が点$\left(1,\ \dfrac{5}{4}\right)$を通るときの, 線分PQの長さの最小値を求めよ.

(1) $x^2-ax-b=0$ の解を α, β $(\alpha<\beta)$ とおくと.

解と係数の関係より. $\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=-b$

$P(\alpha, a\alpha+b)$, $Q(\beta, a\beta+b)$ であるから

$$PQ^2=(\alpha-\beta)^2+\{a\alpha+b-(a\beta+b)\}^2$$
$$=(\alpha-\beta)^2+a^2(\alpha-\beta)^2$$
$$=(a^2+1)\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$$
$$=(a^2+1)(a^2+4b)$$
$$=a^4+4a^2b+a^2+4b$$
$$=a^4+(4b+1)a^2+4b$$

よって.

$PQ=\sqrt{a^4+(4b+1)a^2+4b}$ //

(2) $\dfrac{5}{4}=a+b$ であるから, $4b=-4a+5$

$\therefore PQ^2=a^4+(-4a+6)a^2-4a+5$

これを $f(a)$ と表すと.

$$f'(a)=4a^3-12a^2+12a-4$$
$$=4(a-1)^3$$

a	$\cdots$	1	$\cdots$	
$f'(a)$	$-$	0	$+$	
$f(a)$	$\searrow$	4	$\nearrow$	

$f(1)=1+2-4+5=4$

右の増減表より $f(a)$の最小値は4

$\therefore$ PQの最小値は 2 ($a=1$のとき) //