

2012年工（工業化・経営工・機械工）第1問

1 次の問いに答えよ。

(1) 1枚の硬貨をくり返し投げるゲームを行う。このゲームを、表がちょうど4回出たところ、または、裏がちょうど4回出たところで終了することにする。ただし、硬貨を投げたとき、表が出る確率と裏が出る確率はいずれも $\frac{1}{2}$ である。

(i) 硬貨を k 回投げたところで終了する確率を p_k とすると、

$$p_4 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad p_5 = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}, \quad p_7 = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}} \boxed{\text{キ}}}$$

である。

(ii) このゲームが終了するまでに硬貨を投げる回数の期待値は

$$\frac{\boxed{\text{ク}} \boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}} \boxed{\text{サ}}}$$

である。

(2) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の θ に対して、 x に関する2次方程式

$$x^2 + (\sqrt{2} \sin 2\theta)x + 2 \cos \theta = 0$$

を考える。

(i) この方程式が異なる2つの実数解をもつのは、

$$\boxed{\text{ア}} \boxed{\text{イ}}^\circ < \theta \leq \boxed{\text{ウ}} \boxed{\text{エ}} \boxed{\text{オ}}^\circ$$

のときである。

以下、この方程式が異なる2つの実数解をもつ場合について考え、この2つの実数解を α , β とする。

(ii) 無限等比級数

$$1 + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^n + \cdots$$

が収束するのは、

$$\boxed{\text{カ}} \boxed{\text{キ}} \boxed{\text{ク}}^\circ < \theta \leq \boxed{\text{ケ}} \boxed{\text{コ}} \boxed{\text{サ}}^\circ$$

のときである。

(iii) 無限等比級数

$$1 + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^n + \cdots$$



が収束して、その和が $2 - \sqrt{2}$ となるのは、

$$\theta = \boxed{\text{シ}} \boxed{\text{ス}} \boxed{\text{セ}}^\circ$$

のときである。

(3) $\triangle OAB$ において、辺 AB を $2:1$ の比に内分する点を C ($AC:CB = 2:1$)、線分 OC を $1:2$ の比に内分する点を D ($OD:DC = 1:2$) とする。辺 OA 上に点 P を、辺 OB 上に点 Q を、線分 PQ が点 D を通るようにとる。

(i) $\frac{OA}{OP} + 2 \times \frac{OB}{OQ} = \boxed{\text{ア}}$ である。

以下、 $OA = 2$ 、 $OB = 3$ 、 $\angle AOB = 60^\circ$ とする。

(ii) $OP = 1$ のとき、 $\triangle OPQ$ の面積は

$$\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}} \boxed{\text{エ}}} \times \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

である。

(iii) 線分 OP の長さ と 線分 OQ の長さ の和 $OP + OQ$ が もっとも 小さくなる ように 点 P 、 Q を とるとき、

$$OP = \frac{\boxed{\text{カ}} + \boxed{\text{キ}} \sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。このとき、

$$OP + OQ = \frac{\boxed{\text{コ}} + \boxed{\text{サ}} \sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。