和歌山大学

2016年 理系 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 複素数平面上に原点Oと3点A(5)，B($-10-5i$)，C($3+4i$)をとる．△OABを，点Oが点Cに重なるように平行移動し，さらに点Cのまわりにθだけ回転した．このとき，点Aは点A′(α)に，点Bは点B′(β)に移った．ただし，$-\frac{\pi}{2}<\theta \leqq \frac{\pi}{2}$とし，$\alpha$，$\beta$は複素数とする．3点O，C，A′が一直線上にあるとき，次の問いに答えよ．

(1) α，$\sin\theta$の値を求めよ．

(2) βの値を求めよ．

(3) ∠B′OA′の大きさを求めよ．

(1) $\alpha = 5\cdot(\cos\theta + i\sin\theta) + 3 + 4i$

$\therefore\ \alpha = 3+5\cos\theta + i(4+5\sin\theta)\ \cdots(*)$

xy平面におきかえて考えると．直線OC：$y=\frac{4}{3}x$であり．

O，C，A′が一直線上にあることより．点$(3+5\cos\theta,\ 4+5\sin\theta)$は$y=\frac{4}{3}x$上にある．

$\therefore\ 4+5\sin\theta = \frac{4}{3}(3+5\cos\theta)$

$\therefore\ 15\sin\theta = 20\cos\theta \qquad \therefore\ 3\sin\theta = 4\cos\theta\ \cdots①$

両辺を2乗して．$9\sin^2\theta = 16(1-\sin^2\theta) \qquad \therefore\ \sin^2\theta = \frac{16}{25}$

$-\frac{\pi}{2}<\theta\leqq\frac{\pi}{2}$より．$\cos\theta \geqq 0$　①より　$\sin\theta \geqq 0$なので，$\underline{\sin\theta = \frac{4}{5}}$〃　$\cos\theta = \frac{3}{5}$

これと(*)より．

$\underline{\alpha = 6+8i}$〃

(2) (1)より　$\cos\theta = \frac{3}{5}$

$\therefore\ \beta = (-10-5i)(\cos\theta + i\sin\theta) + 3+4i$

$= (-10-5i)\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right) + 3+4i$

$= \underline{1-7i}$〃

(3) $\angle B'OA' = \arg\frac{\alpha-0}{\beta-0} = \arg\frac{6+8i}{1-7i} = \arg\frac{(6+8i)(1+7i)}{(1-7i)(1+7i)} = \arg\frac{-50+50i}{50} = \arg(-1+i)$

$\therefore\ \underline{\angle B'OA' = \frac{3}{4}\pi}$〃