



2015年工学部第4問

4  $xy$  平面上に曲線  $C: y = \log x$  がある. 曲線  $C$  上の異なる2点  $A(a, \log a)$ ,  $B(b, \log b)$  における法線をそれぞれ  $l$ ,  $m$  とし,  $l$  と  $m$  の交点を  $P$  とする. 線分  $AP$  の長さを  $d$  とするとき, 次の問いに答えよ. ただし, 対数は自然対数である.

(1)  $l$  の方程式を求めよ.

(2)  $P$  の座標を  $a$ ,  $b$  を用いて表せ.

(3)  $d = \sqrt{a^2 + 1} \left( b + \frac{\log a - \log b}{a - b} \right)$  を示せ.

(4)  $B$  が  $A$  に限りなく近づくときの  $d$  の極限値を  $r = \lim_{b \rightarrow a} d$  とする.

(i)  $r = \frac{(a^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{a}$  を示せ.

(ii)  $a$  が  $a > 0$  の範囲を動くとき,  $r$  の最小値と, そのときの  $a$  の値を求めよ.