2014年 理工 第5問　1枚目／2枚

$\boxed{5}$ xy 平面上に曲線 $C : y = x^2$ がある．C 上の2点P，QがPQ＝2をみたしながら動くとき，PQの中点の軌跡を D とする．次の問いに答えよ．

(1) D の方程式を求めよ．

(2) C，D，y 軸および直線 $x = \dfrac{1}{2}$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ．

(1) $P(s, s^2)$, $Q(t, t^2)$ とおく

$PQ = 2$ より　$(s-t)^2 + (s^2 - t^2)^2 = 4$ ⋯①

PQ の中点を $M(X, Y)$ とおくと．

$X = \frac{1}{2}(s+t)$ ， $Y = \frac{1}{2}(s^2+t^2)$ ⋯②

①を変形して．$(s+t)^2 - 4st + (s^2+t^2)^2 - 4s^2t^2 - 4 = 0$ ⋯①′

②より． $s+t = 2X$ ， $s^2+t^2 = 2Y$， $2st = 4X^2 - 2Y$ ⋯②′

②′を①′に代入して． $4X^2 - 8X^2 + 4Y + 4Y^2 - (4X^2-2Y)^2 - 4 = 0$

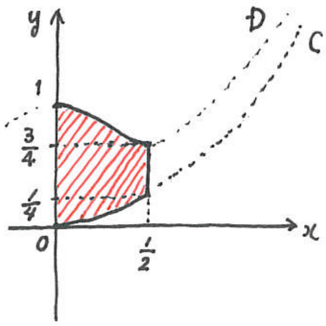
$\therefore Y = \dfrac{4X^4 + X^2 + 1}{4X^2+1} = X^2 + \dfrac{1}{4X^2+1}$　　$\therefore D : \underline{y = x^2 + \dfrac{1}{4x^2+1}}$ //

(2) $y' = 2x + \dfrac{-8x}{(4x^2+1)^2} = \dfrac{2x(2x-1)(2x+1)(4x^2+3)}{(4x^2+1)^2}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	$\frac{3}{4}$	↗	1	↘	$\frac{3}{4}$	↗

∴増減表は右のようになる．また C と D の交点は

$\dfrac{1}{4x^2+1} > 0$ より存在せず，常に D の方が C の上にある．



$\therefore V = \pi \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 + \frac{1}{4x^2+1}\right)^2 - (x^2)^2 \, dx$

$= \pi \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x^2}{4x^2+1} + \frac{1}{(4x^2+1)^2} \, dx$

$= \pi \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \, dx - \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2(4x^2+1)} \, dx + \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(4x^2+1)^2} \, dx$ ⋯(*)

ここで $x = \frac{1}{2}\tan\theta$ とおいて置換積分する．

横浜国立大学

2014年 理工 第5問　2枚目／2枚

数理 石井K

5 xy 平面上に曲線 $C : y = x^2$ がある．C 上の2点P，QがPQ＝2をみたしながら動くとき，PQの中点の軌跡を D とする．次の問いに答えよ．

(1) D の方程式を求めよ．

(2) C，D，y 軸および直線 $x = \dfrac{1}{2}$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ．

(2) のつづき

$x = \frac{1}{2}\tan\theta$ ，$\begin{array}{c|c} x & 0 \to \frac{1}{2} \\ \hline \theta & 0 \to \frac{\pi}{4} \end{array}$ ，$dx = \dfrac{d\theta}{2\cos^2\theta}$

$$\pi\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2(4x^2+1)}\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4}\,d\theta$$
$$= \pi\left[\frac{\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{\pi^2}{16}$$

$$\pi\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(4x^2+1)^2}\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos^2\theta\,d\theta$$
$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{8}$$

$$\therefore V = \pi\left[\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{8}$$
$$= \underline{\frac{3}{8}\pi}\ //$$