



2016年全学部（理工）第3問

3 次の空欄に当てはまる0から9までの数字を入れよ。ただし、空欄 サシ は2桁の数をあらわす。

(1)  $k$  を自然数とすると

$$\int_0^{\pi} \sin^k x \cos x dx = \boxed{\text{ア}}$$

である。

(2) 直線  $y = \sqrt{3}x$  を  $l$  とし、曲線  $y = \sqrt{3}x + \sin^2 x$  を  $C$  とする。直線  $l$  上に点  $A$  をとり、点  $A$  において直線  $l$  と直交する直線を  $L$  とする。関数  $y = \sqrt{3}x + \sin^2 x$  は  $x$  に関する単調増加関数であるので、直線  $L$  と曲線  $C$  の共有点は1点のみである。その共有点を  $B(t, \sqrt{3}t + \sin^2 t)$  とする。点  $A$  と点  $B$  の距離を  $h$  とおくと、

$$h = \frac{1}{\boxed{\text{イ}}} \sin^2 t$$

となる。また、原点  $O$  と点  $A$  の距離を  $p$  とする。点  $A$  の  $x$  座標が0以上であるときは

$$p = \boxed{\text{ウ}} t + \frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}} \sin^2 t$$

となる。この等式の右辺を  $f(t)$  とおく。

$0 \leq x \leq \pi$  の範囲で曲線  $C$  と直線  $l$  で囲まれた図形を考え、その図形を直線  $l$  の周りに1回転させてできる立体の体積を  $V$  とすると、 $V = \pi \int_0^{\boxed{\text{カ}}} h^2 dp$  となる。ここで、 $p = f(t)$  とおいて置換積分すれば、

$$V = \frac{\pi}{\boxed{\text{キ}}} \int_0^{\pi} \sin^4 t dt$$

が成り立つ。 $\int_0^{\pi} \sin^4 t dt = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \pi$  より、 $V = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}} \pi^2$  である。