富山大学

2015年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=\sin 3x-\cos 3x+3\sin 2x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $t=\sin x+\cos x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ とするとき，t のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $f(x)$ を t の関数として表せ．

(3) $f(x)$ の最小値を求めよ．ただし，最小値をとるときの x の値は求めなくてよい．

(1) $t=\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ より．$\underline{-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}}$ //

(2) $f(x)=3\sin x-4\sin^3 x-(4\cos^3 x-3\cos x)+6\sin x\cos x$

$=-4(\sin^3 x+\cos^3 x)+3(\sin x+\cos x)+6\sin x\cos x$

$=-4\left\{(\sin x+\cos x)^3-3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)\right\}+3(\sin x+\cos x)+6\sin x\cos x$

ここで，$t^2=1+2\sin x\cos x$ より．$\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

$\therefore f(x)=-4\left(t^3-3t\cdot\frac{t^2-1}{2}\right)+3t+6\cdot\frac{t^2-1}{2}$

$=\underline{2t^3+3t^2-3t-3}$ //

(3) (2)で求めた関数を $g(t)$ とおくと．

$g'(t)=6t^2+6t-3$

$=3(2t^2+2t-1)$

$\therefore g'(t)=0$ の解は．$t=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$\therefore \beta=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ とおくと．右の増減表より．

$g(t)$ の最小値は $g(\beta)$ となり．$2\beta^2+2\beta-1=0$ より

これを使って次数下げ

$g(\beta)=\beta(2\beta^2+2\beta-1)+\beta^2-2\beta-3$

$=\frac{1}{2}(2\beta^2+2\beta-1)-3\beta-\frac{5}{2}$

$=-3\beta-\frac{5}{2}$

よって．$g(\beta)=-1-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore f(x)$ の最小値は

$\underline{-\frac{2+3\sqrt{3}}{2}}$ //