0001644185538999

広島大学

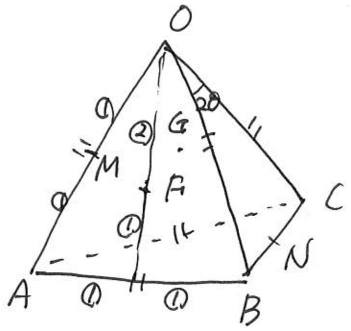
2014年 第3問

$\boxed{3}$ 四面体OABCにおいて，OA = OB = OC = AB = AC = 1とする．△OABの重心をF，△OACの重心をGとし，辺OAの中点をMとする．また，∠BOC = 2θとする．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OF}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{FG} /\!/ \overrightarrow{BC}$であることを示せ．

(3) △MBCの面積をθを用いて表せ．



(1) $\overrightarrow{OF} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

$= \underline{\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}}$ //

(2) (1)と同様に $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

$\therefore \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{FG} /\!/ \overrightarrow{BC}$ ■

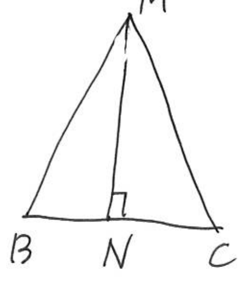
(3) BCの中点をNとおくと．$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$，

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ より．$\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \cos 2\theta$ より．

$|\overrightarrow{MN}|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\cos 2\theta$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$



∴ 図形の対称性より．MB = MC，また BC = 2sinθ

$\therefore \triangle MBC = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2\theta}$

$= \underline{\frac{1}{2}\sin\theta\sqrt{1 + 2\cos 2\theta}}$ //