0001976543208999

広島大学

2015年 文系 第3問

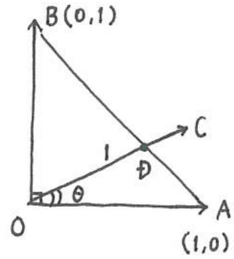
数理 石井K

3 座標平面上に原点Oと2点A(1, 0)，B(0, 1)をとり，$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OB}$とする．点Cは$|\overrightarrow{OC}|=1$，$0°<\angle AOC<90°$，$0°<\angle BOC<90°$を満たすとする．$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=t$とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OC}$を$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，tを用いて表せ．

(2) 線分ABと線分OCの交点をDとする．$\overrightarrow{OD}$を$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，tを用いて表せ．

(3) 点Cから線分OAに引いた垂線と線分ABの交点をEとする．Dは(2)で定めた点とする．このとき，△OBDと△CDEの面積の和をtを用いて表せ．



(1) $\angle AOC=\theta$ とおくと，$0°<\theta<90°$ で

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1\cdot1\cdot\cos\theta=t$　　$\therefore\ \cos\theta=t$

$\sin\theta>0$ より．　$\sin\theta=\sqrt{1-t^2}$

$\therefore\ C(t,\sqrt{1-t^2})$　　$\therefore\ \underline{\overrightarrow{OC}=t\overrightarrow{a}+\sqrt{1-t^2}\ \overrightarrow{b}}$ //

(2) 3点O，D，Cは一直線上にあるから，

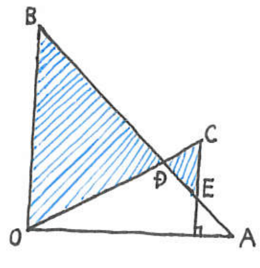
$\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OC}$　(k：実数) と表せる．

(1)より，　$\overrightarrow{OD}=kt\overrightarrow{a}+k\sqrt{1-t^2}\ \overrightarrow{b}$

一方，点Dは直線AB上にあるので，　$kt+k\sqrt{1-t^2}=1$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{t+\sqrt{1-t^2}}$　← 有理化しても大して変わらないのでこのままでよい．

$\therefore\ \underline{\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{t+\sqrt{1-t^2}}(t\overrightarrow{a}+\sqrt{1-t^2}\ \overrightarrow{b})}$ //



(3) 直線AB：$y=-x+1$ より．

$E(t,-t+1)$　　$\therefore\ CE=\sqrt{1-t^2}-(-t+1)$

$\therefore$ △OBD ∽ △CED (2つの角が等しい) で，相似比は $OB:CE=1:\sqrt{1-t^2}+t-1$

$\therefore$ 面積比は．△OBD：△CED $=1:(\sqrt{1-t^2}+t-1)^2$

$\therefore$ △OBD $=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\dfrac{t}{t+\sqrt{1-t^2}}$ より．求める面積の和をSとすると，

$S=$ △OBD $\cdot\left\{1+(\sqrt{1-t^2}+t-1)^2\right\}$

$\quad=\underline{\dfrac{t\{3-2t+2(t-1)\sqrt{1-t^2}\}}{2(t+\sqrt{1-t^2})}}$ //