2017年 教育学部 第1問　　1枚目/2枚　　数理 石井K

$\boxed{1}$ a, bは実数で, $a>0$とする. 放物線$C_1: y=2-x^2$と放物線$C_2: y=x^2+2ax+b$は2つの共有点P, Qをもつとする. ただし, Pのx座標$x_{\rm P}$とQのx座標$x_{\rm Q}$は$x_{\rm P}<x_{\rm Q}$を満たす. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) a, bの条件を求めて, それをab平面上に図示せよ.

(2) 点PにおけるC_1の接線と点QにおけるC_2の接線は平行であることを示せ.

(3) $b=a^3-3a^2-6a+3$のとき, C_1とC_2で囲まれた部分の面積の最大値を求めよ. また, そのときのaの値を求めよ.

(1) $x^2+2ax+b-(2-x^2)=0$

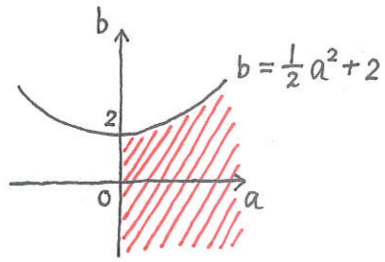
$2x^2+2ax+b-2=0 \quad \cdots ①$

判別式をDとすると,

$D/4 = a^2-2(b-2)$

$\therefore D>0$ より $a^2-2b+4>0$

$\therefore \underline{b<\frac{1}{2}a^2+2 \quad (a>0)}$ //



よって, 求める領域は右図の斜線部分(ただし境界線は含まない)

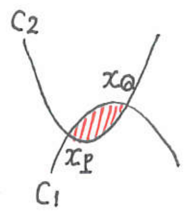
(2) C_1において $y'=-2x$, C_2において $y'=2x+2a$

①で解と係数の関係より, $x_P+x_Q=-a$ であるから

点PにおけるC_1の接線の傾きは, $-2x_P$

点QにおけるC_2の接線の傾きは, $2x_Q+2a=2(-x_P-a)+2a=-2x_P$

$\therefore$ これらの2接線は平行である ■



(3) $S=\int_{x_P}^{x_Q} 2-x^2-(x^2+2ax+b)\,dx$

$=-2\int_{x_P}^{x_Q}(x-x_P)(x-x_Q)\,dx$

$=-2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(x_Q-x_P)^3$ 　$\frac{1}{6}$公式

$=\frac{1}{3}(x_Q-x_P)^3$

$=\frac{1}{3}(-2a^3+7a^2+12a-2)^{\frac{3}{2}} \cdots ②$ 　右の説明と $x_P<x_Q$ より

解と係数の関係より,

$x_P+x_Q=-a$, $x_P\cdot x_Q=\frac{b-2}{2}$

$\therefore (x_Q-x_P)^2=(x_P+x_Q)^2-4x_P\cdot x_Q$

$=a^2-2(b-2)$

$=-2a^3+7a^2+12a-2$

2017年 教育学部 第1問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ a, bは実数で, $a>0$とする. 放物線$C_1: y=2-x^2$と放物線$C_2: y=x^2+2ax+b$は2つの共有点P, Qをもつとする. ただし, Pのx座標x_PとQのx座標x_Qは$x_P<x_Q$を満たす. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) a, bの条件を求めて, それをab平面上に図示せよ.

(2) 点PにおけるC_1の接線と点QにおけるC_2の接線は平行であることを示せ.

(3) $b=a^3-3a^2-6a+3$のとき, C_1とC_2で囲まれた部分の面積の最大値を求めよ. また, そのときのaの値を求めよ.

(3)のつづき

$f(a)=-2a^3+7a^2+12a-2$ $(a>0)$ とおくと

$f'(a)=-6a^2+14a+12$

$=-2(3a+2)(a-3)$

a	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(a)$		$+$	0	$-$
$f(a)$		$\nearrow$	43	$\searrow$

$\therefore$ $a>0$ における $f(a)$ の最大値は 43 ($a=3$のとき)

②より, Sの最大値は $\dfrac{43\sqrt{43}}{3}$ ($a=3$のとき)

このとき, $b=27-27-18+3$

$=-15$

$\therefore$ (1)の条件をみたす