北海道薬科大学

2015年 薬学部 第4問

$\boxed{4}$ 2つの曲線

$C_1 : y = x(x-3)^2$,　$C_2 : y = m^2 x$　(m は正の実数)

は異なる3点で交わるものとする．原点以外の交点の x 座標を α, β $(0 < \alpha < \beta)$ とする．

(1) C_1 は，$x = \boxed{\text{ア}}$ (1) で極大値 $\boxed{\text{イ}}$ (4)，$x = \boxed{\text{ウ}}$ (3) で極小値 $\boxed{\text{エ}}$ (0) をとる．

(2) m の値の範囲は $\boxed{\text{オ}}$ (0) $< m <$ $\boxed{\text{カ}}$ (3) であり

$\alpha = \boxed{\text{キ}}$ (3) $- m$,　$\beta = \boxed{\text{ク}}$ (3) $+ m$

である．

(3) C_1 と C_2 で囲まれた2つの領域の面積が等しくなるのは，$m = \boxed{\text{ケ}}$ (1) のときである．このとき，2つの領域の面積の和は $\boxed{\text{コ}}$ (8) となる．

(1) $C_1 : y = x^3 - 6x^2 + 9x$

$\therefore\ y' = 3x^2 - 12x + 9$

$= 3(x-3)(x-1)$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	4	↘	0	↗

右の増減表より，$x=1$ で極大値4，$x=3$ で極小値0をとる //

(2) $x(x-3)^2 - m^2 x = 0$

$\therefore\ x\{(x-3)^2 - m^2\} = 0$

$\therefore\ x = 0,\ 3 \pm m$　　$\therefore\ \alpha = 3 - m,\ \beta = 3 + m$

$\therefore\ 0 < \alpha < \beta$ より，$0 < 3 - m < 3 + m$　$\therefore\ 0 < m < 3$ //　$\alpha = 3 - m,\ \beta = 3 + m$ //

(3) 2つの領域の面積が等しい

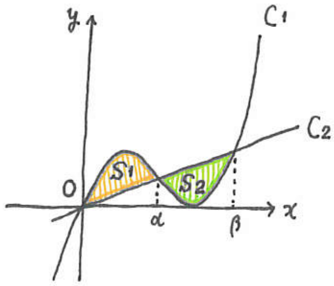
$\Leftrightarrow\ \int_0^\beta x(x-3)^2 - m^2 x\,dx = 0$

$\Leftrightarrow\ \int_0^\beta x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = 0$

$\Leftrightarrow\ \left[\frac{x^4}{4} - \frac{\alpha+\beta}{3}x^3 + \frac{\alpha\beta}{2}x^2\right]_0^\beta = 0$

$\Leftrightarrow\ \frac{1}{4}\beta^4 - 2\beta^3 + \frac{\alpha}{2}\beta^3 = 0$

$\Leftrightarrow\ \frac{1}{4}\beta^3(1-m) = 0$　　$\beta > 0,\ 0 < m < 3$ より，$m = 1$ //



このとき，$\alpha = 2$ より

$S_1 = \int_0^2 x^3 - 6x^2 + 8x\,dx$

$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2$

$= 4$　　$\therefore\ S_1 + S_2 = 8$ //