

2016年 理工・生命科学・食環境科学 第1問

1 次の各問に答えよ。

(1) 整式  $(a+b-7)^3 - (a-b+7)^3$  を因数分解すると、

$$2(b - \boxed{\text{ア}})(\boxed{\text{イ}}a^2 + b^2 - \boxed{\text{ウエ}}b + \boxed{\text{オカ}})$$

7
3
14
49

となる。

(2)  $\log_2 x + \log_2 y = 4$  のとき、 $x^2 + y^2$  の最小値は  $\boxed{\text{キク}}$  で、そのときの  $x, y$  の値は  $x = \boxed{\text{ケ}}$ ,  $y = \boxed{\text{コ}}$  である。

(3) 各辺の長さが  $AB = 10, BC = 8, CA = 6$  である  $\triangle ABC$  において、 $\angle A$  の2等分線と辺  $BC$  との交点を  $D$ 、 $\angle A$  の外角の2等分線と辺  $BC$  の延長との交点を  $E$  とする。このとき、線分  $DE$  の長さは  $\boxed{\text{サシ}}$  である。

(4)  $k$  を定数とすると、方程式  $x^3 + 3x^2 - 9x - k = 0$  が異なる3個の実数解をもつための必要十分条件は  $-\boxed{\text{ス}} < k < \boxed{\text{セソ}}$  である。

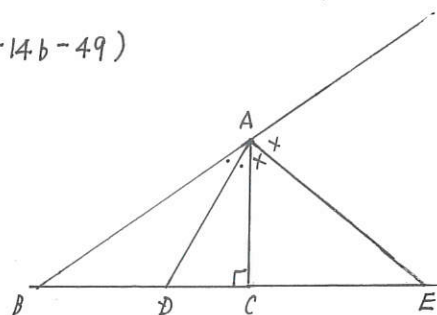
$$\begin{aligned} (1) (a+b-7)^3 - (a-b+7)^3 &= \{(a+b-7) - (a-b+7)\} \{(a+b-7)^2 + (a+b-7)(a-b+7) + (a-b+7)^2\} \\ &= (2b-14)(2a^2+2b^2+98-28b+a^2-b^2+14b-49) \\ &= 2(b-7)(3a^2+b^2-14b+49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \log_2 x + \log_2 y = 4 &\Leftrightarrow \log_2 xy = \log_2 16 \\ &\Leftrightarrow xy = 16 \end{aligned} \quad (3)$$

真数条件より  $x > 0, y > 0$  よって、 $x^2 > 0, y^2 > 0$

$$\begin{aligned} \therefore \text{相加・相乗平均の関係より、} \quad x^2 + y^2 &\geq 2\sqrt{x^2 y^2} \\ &= 2xy \\ &= 32 \end{aligned}$$

$\therefore x^2 + y^2$  の最小値は  $32$ , ( $x = y = 4$  のとき)



角の2等分線の性質より、

$$BD : DC = AB : AC = 5 : 3$$

$$BE : EC = AB : AC = 5 : 3$$

$$\therefore CD = 3, EC = 12 \quad \therefore DE = 15$$

(4)  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$  とおくと、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x - 9 \\ &= 3(x+3)(x-1) \end{aligned}$$

$x$	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	27	$\searrow$	-5	$\nearrow$

増減表より、グラフは右のようになる。

よって  $f(x) = 0$  が異なる3個の実数解をもつ必要十分条件は、

$$-5 < k < 27$$

