2014年 第3問

3 以下の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx$ を求めよ．ただし，m，n は自然数とする．

(2) a と b を $a < b$ を満たす実数とし，$f(x)$ と $g(x)$ を区間 $[a,\ b]$ で定義された連続な関数とする．また，

$$\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx \neq 0, \quad \int_a^b \{g(x)\}^2\,dx \neq 0$$

であるとする．このとき，任意の実数 t に対して

$$\int_a^b \{tf(x) + g(x)\}^2\,dx \geqq 0$$

が成り立つことを用いて，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right\}^2 \leqq \left(\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx\right)\left(\int_a^b \{g(x)\}^2\,dx\right)$$

また，等号が成り立つ条件は，k を定数として $g(x) = kf(x)$ と表せるときであることを示せ．

(3) $f(x)$ は区間 $[-\pi,\ \pi]$ で定義された連続な関数で $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2\,dx = 1$ を満たす．このとき，

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2x\,dx$$

を最大とする $f(x)$ とそのときの I の値を求めよ．