0001996633008999

玉川大学

2013年 全学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 曲線 $y=x^2$ について以下の問いに答えよ．ただし，$m \neq 0$ である．

(1) 傾きが m の接線の方程式を求めよ．

(2) 傾きが $-\dfrac{1}{m}$ の接線の方程式を求めよ．

(3) (1) の接線と (2) の接線の交点を求めよ．

(4) m が 0 以外の実数値をとって変化するとき，(3) で求めた交点の軌跡を求めよ．

(1) $y' = 2x$ より．$2x = m$ $\therefore$ 接点は $\left(\dfrac{m}{2}, \dfrac{m^2}{4}\right)$ となる．

$\therefore y = m\left(x - \dfrac{m}{2}\right) + \dfrac{m^2}{4}$ $\quad \therefore \underline{y = mx - \dfrac{m^2}{4}}$ //

(1) の m に $-\dfrac{1}{m}$ を代入して出してもよい

(2) $y' = 2x$ より．$2x = -\dfrac{1}{m}$ $\therefore$ 接点は $\left(-\dfrac{1}{2m}, \dfrac{1}{4m^2}\right)$

$\therefore y = -\dfrac{1}{m}\left(x + \dfrac{1}{2m}\right) + \dfrac{1}{4m^2}$ $\quad \therefore \underline{y = -\dfrac{1}{m}x - \dfrac{1}{4m^2}}$ //

(3) $mx - \dfrac{m^2}{4} - \left(-\dfrac{1}{m}x - \dfrac{1}{4m^2}\right) = 0$ を解くと．

$$\left(m + \frac{1}{m}\right)x + \frac{1-m^4}{4m^2} = 0$$

$\therefore 4m(m^2+1)x = m^4 - 1$

$m^2+1\ (\neq 0)$ で両辺わって．$4mx = m^2 - 1$

$m \neq 0$ より．$x = \dfrac{m^2-1}{4m}$ このとき．y は．$y = m \cdot \dfrac{m^2-1}{4m} - \dfrac{m^2}{4} = -\dfrac{1}{4}$

$\therefore$ 交点は $\underline{\left(\dfrac{m^2-1}{4m}, -\dfrac{1}{4}\right)}$ //

(4) (3) より．$x = \dfrac{m^2-1}{4m}$ $\therefore$ $m^2 - 4xm - 1 = 0$ 判別式を D とおくと．

$D/4 = (2x)^2 + 1 > 0$

$\therefore$ どのような x に対しても，条件をみたす m が存在する

$\therefore \dfrac{m^2-1}{4m}$ はすべての実数を動く

$\therefore$ 軌跡は $\underline{直線\ y = -\dfrac{1}{4}}$ //