名城大学

2016年 理工学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=\frac{1}{3},\quad a_{n+1}=\frac{a_n}{1+(2n+3)a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定めるとき，次の各問に答えよ．

(1) $\dfrac{1}{a_2}$ と $\dfrac{1}{a_3}$ の値を求めよ．

(2) 一般項 a_n を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k$ を求めよ．

(1) $a_2=\dfrac{\frac{1}{3}}{1+5\cdot\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{8}$ $\quad\therefore\ \underline{\dfrac{1}{a_2}=8}$ //

$a_3=\dfrac{\frac{1}{8}}{1+7\cdot\frac{1}{8}}=\dfrac{1}{15}$ $\quad\therefore\ \underline{\dfrac{1}{a_3}=15}$ //

(2) $a_n=\dfrac{1}{(n+1)^2-1}$ と類推できるので ← できなければもう少し先まで調べてみる！

$a_4=\dfrac{1}{24}$，$a_5=\dfrac{1}{35}$，$a_6=\dfrac{1}{48}$，…

これを数学的帰納法により証明する

(i) $n=1$ のとき，

$a_1=\dfrac{1}{2^2-1}=\dfrac{1}{3}$ となり成り立っている．

(ii) $n=k$ のとき，成り立つと仮定すると，

$$a_k=\frac{1}{(k+1)^2-1}$$

$$\therefore\ a_{k+1}=\frac{\frac{1}{(k+1)^2-1}}{1+(2k+3)\cdot\frac{1}{(k+1)^2-1}}=\frac{1}{(k+1)^2-1+2k+3}=\frac{1}{(k+2)^2-1}$$

∴ $n=k+1$ のときも成り立つ

(i), (ii) より，$a_n=\dfrac{1}{(n+1)^2-1}=\underline{\dfrac{1}{n^2+2n}}$ //

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\underline{\dfrac{3}{4}}$ //