0001522277748999

名城大学

2013年 理工学部 第2問

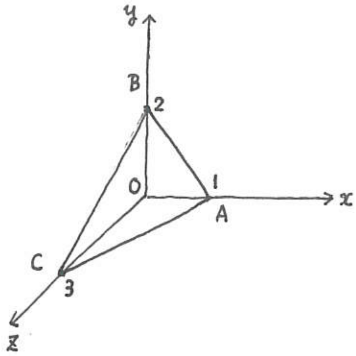
数理 石井K

$\boxed{2}$ 空間の3点 A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 3) を通る平面を α とし，原点 O から平面 α に垂線 OH を下ろす．

(1) 四面体 OABC の体積を求めよ．

(2) $\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表し，点 H の座標を求めよ．

(3) $\triangle ABC$ の面積を求めよ．



$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$

$|\overrightarrow{OA}|=1,\ |\overrightarrow{OB}|=2,\ |\overrightarrow{OC}|=3$

(1) 底面が $\triangle OAB$，高さが OC の三角すいと考えると，

$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{3}=\underline{1}$ //

(2) 点 H は平面 α 上の点であるから，

$\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ (x, y は実数) と表せる

$\therefore\ \overrightarrow{OH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AO}$

$=x(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+y(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+\overrightarrow{OA}$

$=(1-x-y)\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OH}\perp$ 平面 α より，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ かつ $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=\{(1-x-y)\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}\}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=4x-(1-x-y)$

$=5x+y-1$

$\therefore\ 5x+y=1\ \cdots ①$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=\{(1-x-y)\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}\}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$=9y-(1-x-y)$

$=x+10y-1$

$\therefore\ x+10y=1\ \cdots ②$

①, ② より，$x=\frac{9}{49}$, $y=\frac{4}{49}$ 　$\therefore\ \underline{\overrightarrow{AH}=\frac{9}{49}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{49}\overrightarrow{AC}}$ //

$\overrightarrow{OH}=\frac{36}{49}\overrightarrow{OA}+\frac{9}{49}\overrightarrow{OB}+\frac{4}{49}\overrightarrow{OC}$ より，$\underline{H\left(\frac{36}{49},\frac{18}{49},\frac{12}{49}\right)}$ //

(3) (2) より，$OH=\sqrt{\left(\frac{36}{49}\right)^2+\left(\frac{18}{49}\right)^2+\left(\frac{12}{49}\right)^2}=\frac{6}{49}\sqrt{6^2+3^2+2^2}=\frac{6}{7}$ 　$\therefore\ \triangle ABC\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{3}=1$ ($\because$ (1) より)

$\triangle ABC=\underline{\frac{7}{2}}$ //