0002338181667999

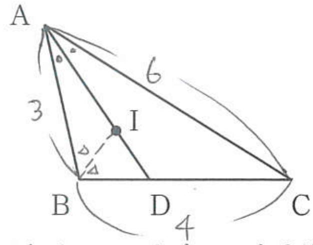
名城大学

2016年 経済学部 第1問　　1枚目 / 4　　増田

1 次の $\boxed{}$ にあてはまる答えを記入せよ．

(1) 100未満の自然数で，3または4または5で割り切れる数は $\boxed{ア}$ 59 個，3または4で割り切れ5では割り切れない数は $\boxed{イ}$ 40 個である．

(2) 右図において，点Iを△ABCの内心，点Dを直線AIと辺BCの交点とし，AB = 3，BC = 4，CA = 6 とする．このとき，BD = $\boxed{ウ}$ $\frac{4}{3}$ であり，$\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{ID}} = \boxed{エ}$ $\frac{9}{4}$ である．



(3) 整数 a を3進数 $122_{(3)}$ で割ったときの商と余りは，それぞれ $212_{(3)}$ と $102_{(3)}$ である．このとき，a を3進法で表すと $\boxed{オ}_{(3)}$ 112220(3) であり，a と5進数 $410_{(5)}$ の和を5進法で表すと $\boxed{カ}_{(5)}$ である． 4012(5)

(4) 不等式 $2|x-a| < x+1$ について考える．$a=5$ のとき，この不等式を満たす整数 x は $\boxed{キ}$ 7 個である．また，この不等式を満たす整数 x が5個あるとき，整数 a の値は $\boxed{ク}$ 3 である．

(5) $-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ で $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$ のとき，$\sin 2\theta = \boxed{ケ}$ $-\frac{3}{4}$，$\cos 2\theta = \boxed{コ}$ $\frac{\sqrt{7}}{4}$ である．

(6) a，b は自然数で，a^5b^2 が20桁の数であり，かつ，$\frac{a^5}{b^2}$ の整数部分が10桁であるとする．このとき，a，b の桁数をそれぞれ m，n とすると，$m = \boxed{サ}$ 3，$n = \boxed{シ}$ 3 である．

(7) 円 $x^2+y^2-2(x+y)+1=0$ と直線 $y+2x=k$ が共有点をもつとき，k の最大値は $\boxed{ス}$ $3+\sqrt{5}$ である．また，この円と直線 $y=ax-3a$ が共有点をもつとき，a の最小値は $\boxed{セ}$ $-\frac{4}{3}$ である．

(1) 100未満の自然数 = 1～99の整数

3で割り切れる数を，n(3) のように表すと，

$n(3) = 99 \div 3 = 33$

$n(4) = 99 \div 4 = 24$ （あまりは無視）

$n(5) = 99 \div 5 = 19$

$n(3\cap4) = 99 \div 12 = 8$

$n(4\cap5) = 99 \div 20 = 4$

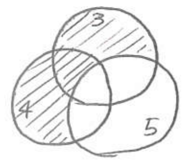
$n(3\cap5) = 99 \div 15 = 6$

$n(3\cap4\cap5) = 99 \div 60 = 1$

$n(3\cup4\cup5) = n(3)+n(4)+n(5)$
$\quad -n(3\cap4)-n(4\cap5)-n(3\cap5)$
$\quad +n(3\cap4\cap5)$
$\quad = 33+24+19-8-4-6+1$
$\quad = 59$

(ア) 59個

$n\{(3\cup4)\cap\overline{5}\}$
$= n(3)+n(4)-n(3\cap4)$
$\quad -n(3\cap5)-n(4\cap5)$
$\quad +n(3\cap4\cap5)$



$= 33+24-8-4-6+1 = 40$

(イ) 40個

(2) 内心は内角の二等分線の交点なので，∠BAD = ∠DAC

よって　AB : AC = BD : DC
　　　　3 : 6 = BD : DC
　　　　(1 : 2)

$\mathrm{BD} = \frac{1}{3}\mathrm{BC} = \frac{1}{3}\times4 = \frac{4}{3}$ …(ウ)

また，∠ABI = ∠IBD より

$\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{ID}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}} = \frac{3}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{4}$ …(エ)

2016年 経済学部 第1問　　2枚目／4　　増田

(3) $122_{(3)} = 3^2\times1+3^1\times2+3^0\times2 = 9+6+2=17$

$212_{(3)} = 3^2\times2+3^1\times1+3^0\times2 = 18+3+2=23$

$102_{(3)} = 3^2\times1+3^0\times2 = 9+2=11$

$a = 17\times23+11 = 402 = \underline{112220_{(3)}}$ …(オ)

$3\,\underline{)\,402}$
$3\,\underline{)\,134}$ …0
$3\,\underline{)\,44}$ …2
$3\,\underline{)\,14}$ …2
$3\,\underline{)\,4}$ …2
1 …1

$410_{(5)} = 5^2\times4+5^1\times1 = 100+5=105$

$a+105 = 507 = \underline{4012_{(5)}}$ …(カ)

$5\,\underline{)\,507}$
$5\,\underline{)\,101}$ …2
$5\,\underline{)\,20}$ …1
4 …0

(4) $2|x-5|<(x+1)$

$x\geqq5$ のとき　$2(x-5)<(x+1)$

$x<11$　　$\therefore 5\leqq x<11$ …①

$x<5$ のとき　$-2(x-5)<(x+1)$

$3x>9$　　$\therefore 3<x<5$ …②

①, ② を満たす整数 x は　$x=4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$　　$\underline{7個}$ …(キ)

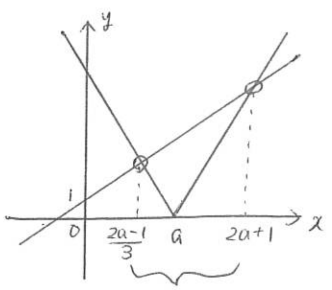
$2|x-a|<(x+1)$ …(*)

$x\geqq a$ のとき　$2(x-a)<(x+1)$

$x<2a+1$

$x<a$ のとき　$-2(x-a)<x+1$

$3x>2a-1$　　$\therefore x>\dfrac{2a-1}{3}$



この間に整数5つ

$(2a+1)-\dfrac{2a-1}{3} = \dfrac{4}{3}(a+1)$ が5以上6未満のとき、不等式(*)を満たす整数が5個となるので、

$5\leqq\dfrac{4}{3}(a+1)<6$

$15\leqq4(a+1)<18$

$\dfrac{11}{4}\leqq a<\dfrac{14}{4}$

整数 $a = \underline{3}$ …(ク)

(5) $(\sin\theta+\cos\theta)^2 = \sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$= 1+\sin2\theta = \frac{1}{4}$

$\therefore \sin2\theta = -\frac{3}{4}$ …(ケ)

$-\frac{\pi}{2} \leqq 2\theta \leqq \frac{\pi}{2}$ では $\cos2\theta \geqq 0$ であり、$\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta=1$ を用いて

$\cos2\theta = \sqrt{1-\sin^2 2\theta} = \sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ …(コ)

(6) a^5b^2 が 20桁 $\Leftrightarrow$ $10^{19} \leqq a^5b^2 < 10^{20}$

10を底とする対数をとって

$19 \leqq \log_{10} a^5b^2 < 20$ …①

$\frac{a^5}{b^2}$ が 10桁 $\Leftrightarrow$ 上記と同様にして

$9 \leqq \log_{10}\frac{a^5}{b^2} < 10$ …②

①+② $28 \leqq \log_{10} a^5b^2 + \log_{10}\frac{a^5}{b^2} < 30$

$28 \leqq \log_{10} a^{10} < 30$

$28 \leqq 10\log_{10} a < 30$

$2.8 \leqq \log_{10} a < 3$

$10^{2.8} \leqq a < 3$ よって a は3桁 $m=3$ …(サ)

①−② $9 < \log_{10} a^5b^2 - \log_{10}\frac{a^5}{b^2} < 11$

$9 < \log_{10} b^4 < 11$

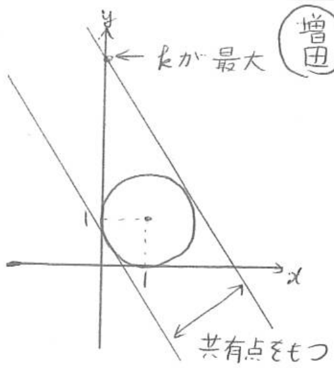
$9 < 4\log_{10} b < 11$

$10^{2.25} < b < 10^{2.75}$ よって b は3桁 $n=3$ …(シ)

0002338181667999

名城大学

2016年 経済学部 第1問　　4枚目/4　　増田



(7) $x^2+y^2-2(x+y)+1=0$ を変形して

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$　　中心$(1,1)$, 半径1の円

これと直線 $2x+y-k=0$ が共有点をもつには、
中心$(1,1)$と直線の間のキョリが半径1より
小さければよい。

$$(\text{キョリ})=\frac{|2+1-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}\leqq 1$$

$$|3-k|\leqq\sqrt{5}$$

kが最大となるとき、$-(3-k)=\sqrt{5}$

$\therefore k=\underline{3+\sqrt{5}}$ …(ス)

同様に、直線 $ax-y-3a=0$ と共有点をもつには、
中心$(1,1)$とこの直線の間のキョリが1より小さければよいので、

$$(\text{キョリ})=\frac{|a-1-3a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}\leqq 1$$

$$|-(2a+1)|\leqq\sqrt{a^2+1}$$

両辺2乗して

$$4a^2+4a+1\leqq a^2+1$$

$$3a^2+4a\leqq 0$$

$$a(3a+4)\leqq 0$$

$$\therefore -\frac{4}{3}\leqq a\leqq 0$$

aの最小値は $\underline{-\frac{4}{3}}$ …(セ)