2016年 薬学部（A・F方式） 第3問

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_{-1}^{1}|t^2-x^2|\,dt$$

で定義する．次の各問に答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(2) $x \geqq 0$ の範囲で $y=f(x)$ のグラフをかけ．

(1) $-1 \leqq t \leqq 1$ において，$|t^2-x^2| = \begin{cases} t^2-x^2 & (t<-x,\ x<t \text{ のとき}) \\ -t^2+x^2 & (-x \leqq t \leqq x \text{ のとき}) \end{cases}$

$$\therefore f(x)=\int_{-1}^{-x} t^2-x^2\,dt+\int_{-x}^{x} -t^2+x^2\,dt+\int_{x}^{1} t^2-x^2\,dt$$

$$=\left[\frac{t^3}{3}-x^2t\right]_{-1}^{-x}+\left[-\frac{t^3}{3}+x^2t\right]_{-x}^{x}+\left[\frac{t^3}{3}-x^2t\right]_{x}^{1}$$

$$=-\frac{x^3}{3}+x^3-\left(-\frac{1}{3}+x^2\right)-\frac{x^3}{3}+x^3-\left(\frac{x^3}{3}-x^3\right)+\frac{1}{3}-x^2-\left(\frac{x^3}{3}-x^3\right)$$

$$=\frac{8}{3}x^3-2x^2+\frac{2}{3}$$

$$f'(x)=8x^2-4x$$

$$=4x(2x-1)$$

$\therefore f'(x)=0$ となるのは，$x=0,\ \frac{1}{2}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$

右の増減表より，最大値 $\frac{4}{3}$（$x=1$ のとき），最小値 $\frac{1}{2}$（$x=\frac{1}{2}$ のとき）//

(2) $x>1$ のとき，$t^2-x^2<0$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ であるから

$$f(x)=\int_{-1}^{1} x^2-t^2\,dt$$

$$=\left[x^2t-\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

$$=x^2-\frac{1}{3}+x^2-\frac{1}{3}$$

$$=2x^2-\frac{2}{3}$$

$\therefore$ (1)とあわせて グラフは右のようになる．