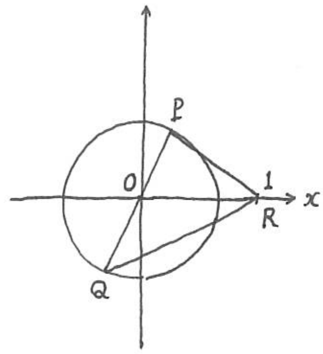
東京大学

2016年 文系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 座標平面上の3点 $P(x,\ y)$, $Q(-x,\ -y)$, $R(1,\ 0)$ が鋭角三角形をなすための $(x,\ y)$ についての条件を求めよ．また，その条件をみたす点 $P(x,\ y)$ の範囲を図示せよ．

$PQ = 2\sqrt{x^2+y^2}$, $PR = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$, $QR = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$



これらが正の値をとるので，$(x,y) \neq (0,0), (1,0), (-1,0)$ …①

$\angle R < 90^\circ$ となることより，線分PQを直径とする円をCとすると，

点RはCの外部にある．すなわち，$x^2+y^2<1$ …② (②は①を含んでいる)

$\triangle OPR$ について余弦定理より，

$$\cos\angle P = \frac{x^2+y^2+(x-1)^2+y^2-1}{2\cdot OP\cdot PR}$$

∴ $\angle P < 90^\circ$ より，$2x^2+2y^2-2x>0$ 　∴ $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\left(\frac{1}{2}\right)^2$ …③

同様に，$\cos\angle Q = \dfrac{x^2+y^2+(x+1)^2+y^2-1}{2\cdot OQ\cdot QR}$ と $\angle Q<90^\circ$ より，

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdots ④$$

②，③，④より，点 $P(x,y)$ の範囲は下図のようになる

ただし，境界線は含まない