三重大学

2013 年 医学部 第 2 問

$\boxed{2}$ θ を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{6}$ となる実数とし，平面上に 3 点 O(0, 0)，P($\cos\theta$, $\sin\theta$)，Q($\cos 3\theta$, $-\sin 3\theta$) をとる．さらに線分 PQ と x 軸との交点を R とする．以下の問いに答えよ．

(1) 加法定理を用いて $\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ だけで表す式を導け．同様に $\sin 3\theta$ を $\sin\theta$ だけで表す式を導け．

(2) PR : RQ ＝ 5 : 11 のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(3) (2) の条件下で △POR の面積を求めよ．

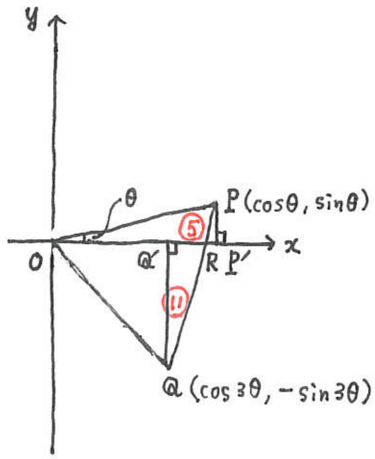
(1)
$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos(2\theta+\theta)\\ &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta\\ &= (2\cos^2\theta-1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta\\ &= \underline{4\cos^3\theta - 3\cos\theta}\ /\!/\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= \sin(2\theta+\theta)\\ &= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta\\ &= 2\sin\theta\cos^2\theta + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta\\ &= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + \sin\theta - 2\sin^3\theta\\ &= \underline{-4\sin^3\theta + 3\sin\theta}\ /\!/\end{aligned}$$

(2) P, Q から x 軸に下ろした垂線の足をそれぞれ P′, Q′ とおくと，

△RPP′ ∽ △RQQ′ であるから

$$\begin{aligned}PR:RQ &= PP':QQ'\\ &= \sin\theta : \sin 3\theta\\ &= \sin\theta : -4\sin^3\theta + 3\sin\theta \quad (\because (1)\ より)\\ &= 1 : -4\sin^2\theta + 3\end{aligned}$$



∴ PR : RQ ＝ 5 : 11 より．$1 : -4\sin^2\theta + 3 = 5 : 11$

$\therefore -20\sin^2\theta + 15 = 11$　　$\therefore \sin^2\theta = \dfrac{1}{5}$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{6}$ より．$\begin{cases}\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt5}\\ \cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt5}\end{cases}$ $/\!/$

(3) (2) のとき．$\cos 3\theta = 4\cdot\left(\dfrac{2}{\sqrt5}\right)^3 - 3\cdot\dfrac{2}{\sqrt5} = \dfrac{2}{5\sqrt5}$，

$\sin 3\theta = -4\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt5}\right)^3 + 3\cdot\dfrac{1}{\sqrt5} = \dfrac{11}{5\sqrt5}$

$\therefore Q\left(\dfrac{2}{5\sqrt5}, -\dfrac{11}{5\sqrt5}\right)$，$P\left(\dfrac{2}{\sqrt5}, \dfrac{1}{\sqrt5}\right)$ より $P'Q' = \dfrac{8}{5\sqrt5}$　$\therefore P'R = \dfrac{5}{16}P'Q' = \dfrac{1}{2\sqrt5}$

$\therefore R\left(\dfrac{3}{2\sqrt5}, 0\right)$　　$\therefore \triangle POR = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2\sqrt5}\cdot\dfrac{1}{\sqrt5} = \underline{\dfrac{3}{20}}\ /\!/$